ροι εὑρίσκονται. ἀνὰ μέσον δ' ἄλλοι ὅροι ἐναλλὰξ πρὸς τοὺς ἄκρους τοὺς αὐτοὺς σώζοντες λόγους καὶ ἀναμὶξ· ὡς πρότερον· ὅσον οὖν αὐτῶν τὴν ἁρμονικὴν σώζοντες ἀναλογίαν τῶν λοιπῶν, ἀπετέλουν τὴν ἀριθμητικήν. ἀνάγκη γὰρ οὕτως διακειμένων τῶν δ, ἵνα ἐμφαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλεγδὴν, ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησιν ἀντεξεταζομένην· ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν τρίτον, τὸν ὑπ' αὐτοῦ, οὕτως ὁ ὑπ' αὐτὸν ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τέταρτον· ὅτι τοιοῦτον τὸ ὑπὸ τῶν μέσων, ἴσον ποιεῖ τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων. πάλιν δὲ ἂν ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ὑπ' αὐτὸν ἐν τοσαύτῃ δειχθῇ διαφορᾷ ἐν ὅσῃ καὶ αὐτὸς οὗτος, πρὸς τὸν ἐλάχιστον, ἀριθμητικὴ ἡ τοιαύτη ἐξέτασις γίνεται, καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις διπλασία τοῦ μέσου. ἐὰν δ' ὁ τρίτος ἀπὸ τοῦ μείζονος ᾧ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων καὶ ὑπερέχει καὶ ὑπερέχηται, ἁρμονικὴ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ τῆς τῶν ἄκρων συνθέσεως διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων. ὑπόδειγμα αὐτῶν ἔστω τοιοῦτον, ς, η, θ, ιβ· οὗτος ὁ μὲν ς σκαληνὸς, ἀπὸ τοῦ ἅπαξ τρεῖς· ὁ δὲ ιβ, ἀπὸ τοῦ δὶς δύο τρεῖς ἐν συνεχείᾳ, μηκυνθέντων· τῶν δὲ μέσων ὁ μὲν ἐλάττων, ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τετράκις· ὁ δὲ μείζων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ τρία τρεῖς· καὶ στερεοί τε ἄκροι καὶ τριχῇ διαστατοί. καὶ ὁμογενεῖς αὗται αἱ μεσότητες· ἔστι κατὰ τὴν γεωμετρικὴν, ὡς ὁ ιβ πρὸς τὸν η, οὕτω ὁ θ πρὸς τὸν ς· κατὰ δὲ τὴν ἀριθμητικὴν, ὅσῳ ὁ ιβ τοῦ θ, τοσούτῳ καὶ ὁ θ τοῦ ς· κατὰ δὲ τὴν ἁρμονικὴν, ᾧ μέρει ὁ η τῶν ς ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ς τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῳ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ς, ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων, ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ· ὁ δὲ θ πρὸς τὸν ς, ἢ ὁ ιβ πρὸς η, διὰ ε ἐν ἡμιολίῳ. ὁ δὲ ιβ πρὸς ς, διὰ πασῶν ἐν διπλασίῳ. λοιπὸν δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η, τονιαῖον ἐν ἐπογδόῳ, ὅπερ μέτρον κοινὸν πάντων τῶν ἐν μουσικῇ λόγων· ἅτε καὶ γνωριμώτερον ὄν. ὅτι ἄρα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν πρώτων καὶ στοιχειωδεστάτων συμφώνων, πρὸς ἄλληλα ὑπερέχει. καὶ περὶ μὲν τῶν ἐν ἀριθμοῖς ἐπιφαινομένων καὶ συμβεβηκότων, τοσαῦτα ὡς ἐν πρώτῃ εἰσαγωγῇ ἀρκείτω.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

ΤΕ'ΛΟΣ Α'ΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ ΝΙΚΟΜΑ'ΧΟΥ.

νομίζουσι· τέσσαρας δέ τινας ἑτέρας μετακινοῦντες τοὺς τούτων ὅρους καὶ διαφοράς, ἐπεξεῦρον τινὲς οὐ πάνυ ἐμφανταζομένας τοῖς τῶν παλαιῶν συγγράμμασιν, ἀλλ᾽ ὡς περιεργότερον λελεπτολογημένας. ἃς ὅμως πρὸς τὸ μὴ δοκεῖν ἀγνοεῖν, ἐπιστοχαστέον τῇ δείξει· πρώτη μὲν γάρ, αὕτη τῶν ἑβδόμη δέ, ἐν τῇ πασῶν συντάξει ἐστίν, ὅταν ᾖ ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ τῶν αὐτῶν διαφορά, πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων· οἷον, θ, η, ϛ· ἡμιόλιος γὰρ ὁ λόγος ἑκατέρου συγκείσει ὁρᾶται. ὀγδόη δὲ μεσότης, ἡ τῆς τούτοις δευτέρα ἐστί, γίνεται, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν ἄκρων διαφορά, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων διαφοράν· οἷον ϛ, ζ, θ· καὶ αὕτη γὰρ ἡμιολίως ἔχει τὰς δύο· ἡ δὲ θ μὲν πασῶν συντάξει· τρίτη δὲ ἡ τῶν ἐφευρημένων ἀριθμῷ ὑπάρχει, ὅταν τριῶν ὅρων ὄντων, ὃν λόγον ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, τοῦτον καὶ ἡ τῶν ἄκρων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαχίστων ἔχῃ· ὡς δ, ϛ, ζ. ἡ δὲ ἐπὶ πάσαις δεκάτη μὲν συλλήβδην· τετάρτη δὲ ἐν τῇ τῶν νεωτερικῶν ἐκθέσει ὁρᾶται, ὅταν ἐν τρισὶ ὅροις ᾖ, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων, πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μειζόνων· οἷον γ, ε, η· ἐπιδιμερὴς γὰρ ὁ ἐν ἑκατέρᾳ συζυγίᾳ λόγος. ἐπὶ κεφαλαίου δὲ εἶεν οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι, ἐκκείσθωσαν ὑφ᾽ ἓν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον· πρώτης, α, β, γ· δευτέρας, α, β, δ· τρίτης, γ, δ, ϛ· τετάρτης, γ, ε, ϛ· πέμπτης, β, δ, ε· ἕκτης, α, δ, ϛ· ἑβδόμης, ϛ, η, θ· ὀγδόης, ϛ, ζ, θ· ἐνάτης, δ, ϛ, ζ· δεκάτης, γ, ε, η. Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης τῆς τριχῆ διαστατῆς πασῶν τε πολυεκτικῆς, ἐν βραχεῖ δὲ ἀρθρώσει μεσότητος, χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πάντα τὴν ἐν μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπήν· κυρίως γὰρ αὕτη καὶ ὡς ἀληθῶς ἁρμονία ἂν λεχθείη μόνη, παρὰ τὰς ἄλλας· εἴπερ μὴ ἐπίπεδος, μηδὲ μιᾷ μόνῃ μεσότητι συνδεομένη, ἀλλὰ δισσῇ ἵν᾽ οὕτω τριχῆ διαστατὸς ὡς ὁ κύβος, ἁρμονία περὶ βραχέος ἐσαφηνίσθη. ὅταν δ᾽ ὦσι δύο ὅρων ἄκρων τριχῆ διαστατῶν ἀμφοτέρων, εἴτε ἰσάκις ἴσων ἰσάκις, ἵνα κύβος ᾖ, ἢ ἰσάκις ἴσων ἀνισάκις, ἵνα ἢ δοκίδες ἢ πλινθίδες ὦσιν, εἴτε ἀνισάκις ἀνίσων ἀνισάκις, ἵνα σκαληνοὶ δύο ὅ-

ροι

ναι τῇ ἁρμονικῇ, ὑπάρχει, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν ἐλαττόνων διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων ἔχει· οἷον, γ, ε, ϛ· ἐν γὰρ διπλασίῳ τὰ συγκειθέντα ὁρᾶται· φανερὸν δὲ, καθ' ἃ ἐναντιοῦται τῇ ἁρμονικῇ· τῶν γὰρ αὐτῶν ἄκρων ἀμφοτέραις ὑπαρχόντων, καὶ ἐν διπλασίῳ τε λόγῳ, ἐν μὲν τῇ πρὸ ταύτης, ἡ τῶν μειζόνων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, τὸν αὐτὸν ἔσωζε λόγον. ἐνταῦθα δὲ ἀνάπαλιν, ἡ τῶν ἐλαττόνων, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων. ἴδιον δὲ ταύτης ἱστέον ἐκεῖνο, τὸ διπλάσιον ἀποτελεῖσθαι, τὸ ὑπὸ τοῦ μείζονος καὶ μέσου, πρὸς τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ ἐλαχίστου. τοῦ γοῦν πεντάκις τρεῖς, διπλάσιον, τὸ ἑξάκις πέντε· αἱ δὲ δύο μεσότητες, πέμπτη καὶ ἕκτη, παρὰ τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλακεῖσαι ἀμφότεραι· διαφέρουσι δ' ἀλλήλων, οὕτως· ἡ μὲν πέμπτη ἐστὶν, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ αὐτῶν τούτων διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου πρὸς τὸν μέσον· οἷον, β, δ, ε· διπλάσιος γὰρ, ὁ μὲν δ, τοῦ β, μέσος ὅρος τοῦ ἐλαχίστου· ὁ δὲ β, τοῦ α, ἐλαχίστων διαφορὰ, πρὸς διαφορὰν μεγίστων, τὸ β τοῦ α. ὃ δ' ὑπεναντίον αὐτὴν τῇ γεωμετρικῇ ποιεῖ, ἐκεῖνό ἐστιν, ὅτι ἐπὶ μὲν ἐκείνης, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα, οὕτως ἡ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ, πρὸς τὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα· ἐπὶ δὲ ταύτης, ἀνάπαλιν· ἡ τοῦ ἐλάττονος πρὸς τὴν τοῦ μείζονος. ἴδιον δ' ὅμως καὶ ταύτης ἐστὶ, τὸ διπλάσιον γίνεσθαι, τὸ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου, τοῦ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου· τὸ γοῦν πεντάκις δ, διπλάσιον τοῦ ὑπὸ πεντάκις β. ἡ δὲ ἕκτη γίνεται, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ᾖ, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν μέσον, οὕτως ἡ τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον ὑπεροχὴ, πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον· οἷον α, δ, ϛ· ἐν ἡμιολίῳ γοῦν ἑκάτεροι λόγῳ· ἔοικε δ' αἰτία καὶ ταύτῃ, τῆς πρὸς γεωμετρικὴν ὑπεναντιότητος. ἀναστρέφει γὰρ κἀνταῦθα ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης· καὶ αἱ μὲν παρὰ τοῖς πρόσθεν θρυλλούμεναι ϛ μεσότητες· αἱ δὲ εἰσὶ, τρεῖς μὲν αἱ πρωτότυποι μέχρις Ἀριστοτέλους καὶ Πλάτωνος, αἵ ωθεις ἀπὸ Πυθαγόρου διαμεῖναι· τρεῖς δ' ἕτεραι ἐκείναις ὑπεναντίαι τοῖς μετ' ἐκείνους ὑπομνηματογράφοις τε καὶ αἱρετισταῖς ἐν χρήσει γινόμεναι.

πλεῖ τῆς ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένου. ἂν δὲ οἱ δύο ἄκροι ὅροι, μὴ ἄρτιοι ἐκτεθῶσιν, ἀλλὰ περιττοί, οἷον ε, καὶ με· ὁ μὲν αὐτὸς ὅρος ὁ κε, ἀριθμητικὴν ποιήσει· ἄρτιον δὲ τοῦτον, ὅτι ἐφ' ἑκάτερα αὐτοῦ, ἴσῳ ἀριθμῷ ὑπερέβησάν τε καὶ ὑπέβησαν οἱ ὅροι, τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὸν διατηροῦντες διαφορᾶς ποσότητα· ὁ δὲ ἀντιτεθείς, τὴν γεωμετρικὴν ἀποδίδωσι, τριπλάσιός τε καὶ ὑποτριπλάσιος ἑκατέρου ὤν· ὁ δὲ τὸ μεταλαβὼν τοῦ μέσος ᾖ, τὴν ἁρμονικὴν ἀποδίδωσιν· οἷς γὰρ μέρεσι μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι, τέσσαρσι πέμπτοις αὐτοῦ τοῦ ἐλάττονος, τούτοις τοῦ μείζονος ἐλάττων ἐστὶν ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι θεωρουμένοις· τέσσαρσι γοῦν πέμπτοις· καὶ πάντως τὰ προλεχθέντα τὰ ἰδιώματα ἐφαρμόζων, σύμφωνα εὑρήσεις. ἔφοδος δὲ ὡς ἂν εὐτέχνως πλάσοις τοὺς προδειχθέντας ὅρους κατὰ τρεῖς ἀναλογίας, τοιαύτη ἔστω σοι, ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προχειρισθέντων ὅρων περιττῶν τε καὶ ἀρτίων, ἀριθμητικὴν μὲν εὑρήσεις, συνθεὶς τὰ ἄκρα τούτων τὸ ἥμισυ μέσον τάξον· ἢ τὴν τοῦ μείζονος ὑπεροχὴν διχῇ τεμὼν καὶ προσθεὶς τῷ ἐλάττονι, μέσον ἕξεις· γεωμετρικὴν δέ, τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς μήκους, τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρών, μέσον ὅρον ποιήσεις· ἢ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ ὅροι λόγον ἰδών, τοῦτον δίχα τεμών, μέσον ποίησον, οἷον ἐπὶ τετραπλασίου, διπλάσιον. ἁρμονικὴν δέ, τῶν ἄκρων τὴν διαφορὰν, ποιητέον ἐπὶ τὸν ἐλάττονα καὶ τὸν γενόμενον παραβλητέον ἐπὶ τὸν σύνθετον ἐκ τῶν ἄκρων· εἶτα τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς προσθετέον τῷ ἐλάττονι, καὶ ἔσται ὁ γινόμενος ἁρμονικὴ μεσότης. καὶ τάδε μὲν περὶ τῶν παρὰ τοῖς παλαιοῖς θρυλλουμένων τριῶν ἀναλογιῶν, ἃς καὶ ἐπὶ τῆσδε σαφέστερον καὶ πλατύτερον διηρθρώσαμεν, ὃ πολλάκις τε καὶ ποικιλώτερον ἐντυγχάνειν ἦν αὐταῖς, ἐν τοῖς ἀναγνώσμασι· τὰς δ' ἑξῆς ἐπιθυμητέον, οὐ πάνυ φερομένας παρὰ τοῖς ἀρχαίοις· ἀλλὰ εἰς μόνην ἐμπειρίαν ἡμῶν αὐτῶν, καὶ τὸ οἱονεὶ πλῆρες τοῦ συλλογισμοῦ παραλαμβανομένας. εἰσὶ δὲ αὗται, τάξει ἐκφερόμεναι ὑφ' ἡμῶν, καθ' ὑπεναντίωσιν τὴν πρὸς τὰς πεφρασμένας ἀρχετύπους τρεῖς· εἶπερ καὶ ἐξ αὐτῶν τούτων ἀναπλάσσονται, τάξεως τυγχάνουσαι ὁμοίας· τετάρτη μέν, ἡ καὶ ὑπεναντία λεγομένη, διὰ τὸ ἀντικεῖσθαι καὶ ἀντιπεπονθέναι

μὲν ἀριθμητικήν, ἴσῳ ὑπερέχουσάν τε καὶ ὑπερεχομένην· κατὰ δὲ γεωμετρικήν, ὁμοίῳ λόγῳ διαφορουμένην· κατὰ δὲ ἁρμονικήν, τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων τῶν αὐτῶν, μείζονά τε καὶ ἐλάττονα, περικείσθωσαν δὴ πρῶτον οἱ ὅροι, ὧν μεταξὺ αἱ τρεῖς μεσότητες, ζητητέον πῶς ἂν ταχθεῖεν καὶ τίνες· καὶ ἔστωσαν ὅ, τε ι καὶ ὁ μ· πρῶτον δὴ τὴν ἀριθμητικὴν ἐναρμόζω, καὶ ἔστιν ὁ κε· καὶ τὰ παρακολουθήματα αὐτῆς σώζεται πάντα κἀνταῦθα· ὡς γὰρ ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτόν, οὕτω καὶ διαφορὰ πρὸς διαφοράν· ἄρα ἐν ἰσότητι, καὶ ὅσῳ ὁ μείζων τοῦ μέσου, τοσούτῳ καὶ οὗτος τοῦ ἐλάττονος ὑπερφέρει· καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις, διπλασία τοῦ μέσου· καὶ ὁ τῶν ἐλαττόνων ὅρων λόγος μείζων, τοῦ τῶν μειζόνων· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου, τῷ ἀπὸ τῶν διαφορῶν τετραγώνῳ· καὶ ὁ μέσος τῷ αὐτῷ ἰδίῳ μέρει, καὶ μείζων ὑπάρχει καὶ ἐλάττων τῶν ἄκρων· ἐν δὲ τοῖς ἄκροις θεωρουμένων τρισὶν ὀγδόοις ἑτέρῳ καὶ ἑτέρῳ. ἐὰν δὲ τὴν κ μεσότητα ἐμβάλω, εἰς τοὺς προκειμένους ἀρτίους ὅρους, τὰ τῆς γεωμετρικῆς ἰδιώματα ἀνακάμπτει· παραπόλλυται δέ, τὰ τῆς ἀριθμητικῆς· ἔστι γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, τοιοῦτος καὶ ὁ μέσος πρὸς τὸν μικρόν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· καὶ αἱ διαφοραὶ πρὸς ἀλλήλας ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ θεωροῦνται, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι· καὶ οὔτε ἐν τοῖς ἄκροις καθαροῖς, ἡ τοῦ μέρους ταυτότης καθ' ὑπεροχὴν καὶ ἔλλειψιν, οὔτε ἐν μέσῳ καθαρῷ· ἀλλ' ἐν μέσῳ καὶ θατέρῳ τῶν ἄκρων· παρὰ μέρος ἔν τε μείζοσιν ὅροις καὶ ἐλάττοσιν ἴσος λόγος· ἐὰν δὲ τὸν ιϛ ἀντιλάβω μέσον ὅρον, πάλιν τὰ μὲν τῶν προτέρων δυοῖν μεσοτήτων ἰδιώματα, ἐκποδὼν γίνεται. τὰ δὲ τῆς ἁρμονικῆς ἀναφαίνεται, πρὸς τοὺς αὐτοὺς διαμένοντα δύο ἀρτίους ὅρους· ὥσπερ γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν μειζόνων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων. καὶ ὅσοις μέρεσιν ὁ μέσος ἐλάττων τοῦ μείζονος, ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι θεωρουμένοις· τοσούτοις ὁ αὐτὸς τοῦ ἐλάττονος μείζων, ἐν αὐτῷ τῷ ἐλάττονι θεωρουμένοις. καὶ ὁ μὲν τοῖς μείζοσιν ὅροις λόγος, μείζων· ἐλάττων δέ, ὁ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις λόγος, μείζων· ἐλάττων δ' ὁ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ὅπερ οὐκ ἐπ' ἄλλης. καὶ συντεθέντα τὰ ἄκρα ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντα, διπλάσιον ἀποτελεῖ

τελεῖ

τοῦ τε ἐξ ἡμιολίου καὶ τοῦ ἐξ ἐπιτρίτου· ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ τῆς ἐν πενταπλασίοις πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων. τινὲς δὲ αὐτὴν ἁρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν, ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἁρμονίᾳ· γεωμετρικὴν δὲ ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰ διαστήματα ἡρμόσθαι, ἰσάκις ἴσα ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ, ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται· πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου, εἰσὶ ιβ· γωνίαι δὲ, η· ἐπίπεδα δὲ, ϛ. μεσότης ἄρα ὁ η τῶν ϛ καὶ τῶν ιβ, κατὰ τὴν ἁρμονικήν. ὡς γὰρ οἱ ἄκροι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως ἡ τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον διαφορὰ, πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον διαφοράν· καὶ πάλιν ὁ μέσος, ἄλλῳ μὲν ἑαυτοῦ μέρει μείζων ἐστὶ τοῦ ἐλάσσονος· ἄλλῳ δὲ, ἐλάσσων τοῦ μείζονος· ἐν μὲν τῇ καὶ τῇ αὐτῇ αὐτῶν τῶν ἄκρων μέρει, καὶ μείζων καὶ ἐλάττων ὑπάρχει. καὶ ἑτέρως οἱ ἄκροι συντεθέντες καὶ ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντες, διπλάσιον ἀποτελοῦσι τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς ἀλλήλους γινομένου· καὶ ἡ μὲν, διὰ τεσσάρων, ἐστὶ τοῦ η, πρὸς τὸν ϛ ἐπίτριτος χώρα· ἡ δὲ διὰ πέντε, τοῦ ιβ πρὸς τὸν η ἡμιόλιος χώρα· ἡ δὲ διὰ πασῶν ἀμφοῖν οὖσα σύστημα, ἡ τοῦ ιβ πρὸς ϛ διπλασία χώρα· ἡ δὲ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε τριπλάσιος οὖσα, ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ, ὑπάρχει πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων· ἡ δὲ δὶς διὰ πασῶν, ὁ μέσος ὅρος, πρὸς τὴν ἑαυτοῦ καὶ ἐλάττονος διαφοράν. οἰκειότατα ἄρα ἁρμονικὴ προσονομάζεται. ὥσπερ δὲ ἐν τῇ τοῦ μουσικοῦ κανόνος κατατομῇ χορδῆς μιᾶς τεταμένης, ἢ αὐλικοῦ μήκους ἴσου ἐκκειμένου, τῶν ἄκρων ἀμετακινήτων ὑπαρχόντων, μεταλαμβανούσης δὲ τῆς μεσότητος, ἐν μὲν αὐλῷ διὰ τρημάτων· ἐν δὲ τῇ χορδῇ, δι᾽ ὑπαγωγίως, ἄλλον ἐξ ἄλλου τρόπον, ἀποτελεῖσθαι δύνανται αἱ προλεχθεῖσαι μεσότητες, ἀριθμητική τε καὶ γεωμετρικὴ καὶ ἁρμονική· ἵνα εἰκότως καὶ ἐντιμότατα καλοῖντο, διὰ τὴν τοῦ μέσου ὅρου μετάστασίν τε καὶ μεταχώρησιν διαφόρως συντελούμεναι, οὕτως καὶ ἐν ἀριθμητικοῖς δυσὶν ὅροις εἴ τε περισσοῖς ἀμφοτέροις, εἴ τε καὶ ἀρτίοις εὔλογον ἐστὶ καὶ ἅμα δυνατὸν μένουσιν ἐν τῷ αὐτῷ καὶ μὴ μεταβιβαζομένοις, μεσότητα καθ᾽ ἑκάστην τῶν τριῶν ἐφαρμόζουσαν ἐντάσσεσθαι· ἔστω

μὲν

ἀλλήλους παρεχομένη· ἡ δὲ γεωμετρική, ὁμοιότητα τὰς σχέσεις ὁμοίας κατὰ τὸ ποιὸν τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους ἀποδιδοῦσα· αὕτη δὲ, κατὰ τὸ πρὸς ἕτερόν πως ἐν ἑτέροις εἴδεσι φανταζομένη. ἐφεξῆς πάντων κατὰ συνέχειαν κειμένων τῶν ἀριθμῶν ἀεὶ ὁ δεύτερος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ὑπερέχει μονάδι· ὁ δύο, τοῦ ἑνός· ὁ γ, τοῦ β· ὁ δ, τοῦ γ. λόγοι δὲ, οὐχ οἱ αὐτοί· ὁ μὲν γὰρ δ, τοῦ γ ἐστὶν ἐπίτριτος· ὁ δὲ γ, τοῦ β ἡμιόλιος· ὁ δὲ δύο, τῆς μονάδος διπλάσιος. οὔτε γὰρ ἐν ὅροις μόνον, οὔτε ἐν διαφοραῖς μόνον· ἀλλ' ἐκ μέρους μὲν, ἐν ὅροις· ἐκ μέρους δὲ, ἐν διαφοραῖς. ὡς γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ πρὸς τὸν
† αὐτὸν μέσον, πρὸς τὴν τοῦ ἐλαχίστου πρὸς τὸν αὐτὸν μέσον· καὶ ἀνάπαλιν. ὁ δὲ πρὸς τὴν ἐπίγνωσιν ἐν τῇ τῶν ὄντων ἀνώτερον φρασθείσῃ διαιρέσει, τῆς ἁρμονικῆς ἴδιον θεωρίας· ἀλλὰ καὶ οἱ μουσικοὶ τῶν ἐν ἁρμονίᾳ συμφωνιῶν λόγοι, ἐν ταύτῃ μᾶλλον εὑρίσκονται τῇ μεσότητι. στοιχειωδέστατος μὲν, ὁ διὰ τεσσάρων, ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ· ὡς δ πρὸς τὰ γ, ὅρος πρὸς ὅρον. ἐν τῷ κατὰ τὸν διπλάσιον ὑποδείγματι, ἡ διαφορὰ πρὸς διαφοράν, ἐν τῷ κατὰ τὸ τριπλάσιον· τοῦ γὰρ ϛ πρὸς β ἢ πάλιν, τοῦ ϛ πρὸς γ, αὗται αἱ διαφοραί. μετὰ δὲ τοῦτον εὐθὺς, ὁ διὰ πέντε ὑπάρχων ἡμιόλιος τοῦ γ, πρὸς β· ἢ πάλιν τοῦ ϛ, πρὸς δ· ὅρου πρὸς ὅρον. εἶτα τούτων ἀμφοτέρων σύστημα, τοῦ τε ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου, ὁ διὰ πασῶν ἐφεξῆς αὐτοῖς κείμενος, ἐν διπλασίῳ ὑπάρχων λόγῳ, ὡς ϛ πρὸς γ, ἐν ἀμφοτέροις ὑποδείγμασιν, ὅροις πρὸς ὅρον· ἢ ὁ ἐπὶ τούτῳ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ ε τριπλάσιον σώζων ἀμφοτέρων ἅμα τὸν λόγον, σύστημα ὑπάρχων διπλασίου ἅμα καὶ ἡμιολίου· ὥσπερ τοῦ ϛ πρὸς β, ὅρου, ἐν τῷ κατὰ τὸν τριπλάσιον ὑποδείγματι· καὶ πάλιν διαφορᾶς πρὸς διαφοράν, ἐν τῷ αὐτῷ· ἐν δὲ τῷ κατὰ τὸ διπλάσιον ὅρου μεγίστου πρὸς διαφορὰν αὐτοῦ καὶ τοῦ μέσου, ἢ διαφορᾶς τῶν ἄκρων, πρὸς διαφορὰς τῶν ἐλαττόνων. τελευταῖον δὲ καὶ μέγιστον σύμφωνον τὸ λεγόμενον δὶς διὰ πασῶν, ὡσανεὶ δὶς διπλάσιον· ὑπάρχον δὲ ἐν λόγῳ τετραπλασίῳ, ὡς ὁ μέσος ὅρος τῶν ἐν διπλασίοις, πρὸς τὴν τῆς ἐλάττονος διαφοράν,

τοῦ τε

διαιρῶμεν. ἔστι γὰρ ἡ τῇ τρίτῃ τάξει μεσότης ἁρμονικὴ καλουμένη, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ὁ μέσος θεωρῆται πρὸς τοὺς ἄκρους μήτε ἐν λόγῳ τῷ αὐτῷ ἐξεταζόμενος, τοῦ μὲν πρόλογος, τοῦ δὲ ὑπόλογος, ὡς ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς· μήτε ἐν διαστήμασι μὲν ἴσοις, λόγων δὲ ἑτερότητι, ὡς ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς· ἀλλ᾽ ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ὅρον ἔχῃ, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ τὸν μέσον πρὸς τὴν τοῦ μέσου διαφορὰν παρὰ τὸν ἐλάχιστον· οἷον, γ, δ, ς· ἢ πάλιν, β, γ, ς· ὁ γὰρ ς τοῦ δ, τῷ αὐτοῦ τρίτῳ ὑπερέχει· τρίτον γὰρ τοῦ ς, τὰ β· καὶ ὁ γ, τοῦ δ λείπεται, τῷ αὐτοῦ τρίτῳ· τοῦ γὰρ τρία, τρίτον μονάς. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ προτέρου ὑποδείγματος, οἵ τε ἄκροι ἐν διπλασίονι λόγῳ, καὶ αἱ τούτων πρὸς τὸν μέσον διαφοραί, πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ διπλασίῳ πρὸς ἀλλήλας· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, ἑκατέρα ἐν τῷ τριπλασίῳ. ἰδίωμα δὲ ἔχει ὑπεναντίον, ὡς προέφαμεν, τῷ κατὰ τὴν ἀριθμητικήν. ἐκεῖ γὰρ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις, μείζονες ἦσαν οἱ λόγοι· ἐλάττονες δὲ, ἐν τοῖς μείζοσιν. ὧδε δὲ ἀνάπαλιν, οἱ μὲν ἐν τοῖς μείζοσι, μείζονες· οἱ δὲ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ἐλάττονες· ἵνα ὡς ἐν μεσότητι ἀμφοῖν τῇ γεωμετρικῇ, εἰκότως ἡ τῶν ἑκατέρωθι λόγων ἰσότης μεταίχμιον οὖσα τοῦ μείζονος καὶ ἐλάττονος ἐνθεωρῆται. ἔτι ἐν μὲν τῇ ἀριθμητικῇ, ὁ μέσος ἑαυτοῦ, μέρει τῷ αὐτῷ μείζων τε καὶ ἐλάττων τῶν ἑκατέρωθι φαίνεται· αὐτῶν δὲ ἐκείνων τῶν ὅρων, τῶν ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ μείζων ἢ ἐλάττων. ἐν δὲ τῇ ἁρμονικῇ ταύτῃ ὑπεναντίως· ἑαυτοῦ μὲν γὰρ ὁ μέσος ἑτέρῳ καὶ ἑτέρῳ, μείζων καὶ ἐλάττων τῶν ἑκατέρωθί ἐστιν· αὐτῶν δὲ ἐκείνων ἑκατέρωθι πάντως, τῷ αὐτῷ· ἤτοι γὰρ ἑκατέρων ἡμίσει, ἢ ἀμφοτέρων τρίτῳ. ἡ δὲ γεωμετρικὴ ὡς ἐν μεταιχμίῳ ἀμφοῖν, οὔτε ἐν μέσῳ μόνον, οὔτε ἐν τοῖς ἄκροις μόνον· ἀλλὰ καὶ ἐν ἀμφοτέροις, μέσῳ καὶ ἄκρῳ. ἔτι ἡ ἁρμονικὴ, ἔχει ἴδιον συμβεβηκὸς τὸ τοὺς ἄκρους συντεθέντας, καὶ πολυπλασιασθέντας ὑπὸ τοῦ μέσου, διπλάσιον ἀποτελεῖν, τοῦ ἐξ ἀλλήλων πολυπλασιασμοῦ. ἐκλήθη δὲ ἁρμονικὴ ἡ τοιαύτη μεσότης, ὅτι ἡ μὲν ἀριθμητικὴ ποσῷ διεκρίνετο, ἰσότητα κατὰ τοῦτο ἐν τῇ τῶν ὅρων διαστάσει, πρὸς ἀλλή-

πίπεδοι μιᾷ μεσότητι συνέχονται πάντως· οἱ δὲ στερεοὶ, δυσὶν ἀνάλογον καὶ μόναις. δύο γὰρ τετραγώνων συνεχῶν, εἷς μόνος εὑρίσκεται μέσος, ἀναλογίαν σώζων γεωμετρικήν· πρὸς τὸν ἐλάττονα ὑπὸ λόγος δὲ, πρὸς τὸν μείζονα· οὐδέποτε δὲ πλείονες. δύο ἄρα διαστήματα διαφερούμενα πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ τοῦ μέσου ἐν σχέσει λόγου ὁμοίου. πάλιν δὲ δύο κύβων συνεχῶν, δύο μόνοι εὑρίσκονται ἀνάλογοι μέσοι ὅροι κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν· πλείονες δὲ, οὐδέποτε. τρία ἄρα διαστήματα, ἐν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν μέσων πρὸς ἀλλήλους· δύο δὲ, τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων πρὸς τοὺς μέσους ἑκατέρωθεν· οὕτω τὰ μὲν στερεὰ σχήματα λέγεται τριχῇ διαστατά· τὰ δὲ, ἤδη ἐπίπεδα διχῇ· οἷον, ὁ α καὶ ὁ δ, ἐπίπεδοι· μέσος δὲ ἀνάλογον, ὁ β. ἢ δὴ, δ, θ, δύο τετράγωνοι· μέσος δὲ, αὐτῶν ἀνάλογον ὁ ς ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐχόμενος ὑπὸ τοῦ μείζονος, καὶ ἔχων τὸν ἐλάττονα, ἐν ᾧ καὶ ἡ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν ἔχει· τούτου δ' αἴτιον, ὅτι αἱ τῶν δύο τετραγώνων πλευραὶ, ἑκατέρα μία ἰδία αὐτῶν τὸν ς ἅμα ἀμφότεραι γεννῶσιν. ἐν δὲ κύβοις (δὴ τῷ η καὶ τοῖς κζ) μία μὲν οὐκέτι· δύο δὲ μεσότητες εὑρίσκονται, ὅ, τε ιβ, καὶ ὁ ιη, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑαυτάς τε καὶ τοὺς ὅρους τηροῦσαι, ἐν ᾧ καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας εἰσί. καὶ τούτου δ' αἴτιον, τὸ τῶν κυβικῶν πλευρῶν μίγδην σύστημα ποιεῖν τὰς β μεσότητας· δὶς δύο, τρὶς τρεῖς, δὶς ἐὰν μὲν καθόλου τετράγωνος τετράγωνον λάβῃ, τουτέστι, πολυπλασιάσῃ, τετράγωνος, πάντως ποιεῖ· ἐὰν δὲ τετράγωνος ἑτερομήκης, οὐδέποτε τετράγωνος ἀποτελεῖται, κἂν κύβος κύβον, κύβος πάντως γενήσεται· ἐὰν δὲ ἑτερομήκης, κύβον ἑτερομήκη, οὐδέποτε κύβος· καθάπερ ἀμέλει ἂν ἄρτιος ἄρτιον πολυπλασιάσῃ, πάντως ἄρτιος γίνεται· κἂν περισσὸς περισσὸν, πάντως περισσός· ἂν δὲ περισσὸς ἄρτιον, ἢ ἄρτιος περισσὸν, πάντως ὁ γινόμενος ἔσται ἄρτιος, οὐδέποτε δὲ περισσός. ταῦτα δὲ, τῆς οἰκείας σαφηνείας τεύξεται ἐν τῇ πλατωνικῇ συναναγνώσει κατὰ τὸν τοῦ λεγομένου γάμου τόπον ἐν τῇ πολιτείᾳ, ἀπὸ προσώπου τῶν μουσῶν παρεισαγομένου· ὥς τε ἤδη τὴν τρίτην ἀναλογίαν τὴν καλουμένην ἁρμονικὴν μεταβάντες διαρω-

ωμετρικὴ μεσότης, ὃ μηδεμία τῶν λοιπῶν, τὸ τὰς τῶν ὅρων διαφορὰς ἐν λόγῳ πρὸς ἀλλήλας τῷ αὐτῷ εἶναι, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι πρὸς τοὺς συνεχεῖς· οἱ μείζονες πρὸς τοὺς ἐλάττονας· καὶ τὰς ἀνάπαλιν. ἔτι καὶ ἕτερον ἰδίωμα, τὸ τοὺς μείζονας ὅρους διαφορὰν ἔχειν πρὸς τοὺς ἐλάττονας αὐτοὺς τοὺς ἐλάττονας, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν αὐτῇ τῇ ἐλάττονι διαφέρειν· ἐν διπλασίῳ λόγῳ ἐκκειμένων τῶν ὅρων. ἐν δὲ τριπλασίῳ, διαφορὰν ἕξουσι δὶς τὸν ὑπ᾽ αὐτὸν οἱ ὅροι καὶ αἱ διαφοραί· ἐν τετραπλασίῳ δὲ τρίς· καὶ ἐν πενταπλασίῳ τετράκις· καὶ τοῦτο μέχρι παντός. οὐ μόνον δὲ ἐν πολλαπλασίοις ἀναλογίαι γίνονται γεωμετρικαί, ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιμορίοις εἴδεσιν ἅπασι, καὶ ἐπιμερέσι καὶ μικτοῖς. καὶ τὸ ἐξαίρετον ἰδίωμα τῆς μεσότητος ταύτης, ἐπὶ πασῶν σώζεται· τῶν μὲν συνημμένων τὸ, ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον, τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· τῶν δὲ ἐν διαζεύξει ἢ καὶ ἐν πλείοσιν ὅροις κἂν συμμένοι ὦσιν, ἀρτιοταγὲς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῶν μέσων. παράδειγμα δὲ τοῦ ἐν πάσαις ταῖς σχέσεσι πολυπλασίαις τε παντοίαις καὶ ἐπιμερέσι παντοίαις, καὶ μικταῖς παντοίαις, τὸ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἰδίωμα σώζεσθαι, ἔστω ἱκανὸν καὶ αὔταρκες ἡμῖν ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ἀπὸ ἰσότητος ἐπλάσσομεν κατὰ τὰ τρία προστάγματα πάντα τὰ τοῦ ἀνίσου εἴδη ἐξ ἀλλήλων, ὀρθῶς τε τιθεμένων, καὶ ἀναστρεφομένων. ἑκάστη γὰρ πλάσις, ἢ ἔκθεσις, ἀναλογία ἐστὶ μετρική, πάντα τὰ λεχθέντα ἰδιώματα περιέχουσα· καὶ τέταρτον, τὸ ἔν τε μείζοσιν ὅροις ἔν τε ἐλάττοσι, τὸν αὐτὸν διαφυλάττειν λόγον. ἀλλὰ καὶ ἐὰν τοὺς κοινοὺς στίχους ἑτερομηκῶν τε καὶ τετραγώνων ἐκθώμεθα. εἶτα παρ᾽ ἓν τὰ περιέχοντα τοὺς ἐν ἀμφοτέροις αὐτοῖς· εἶτα κατὰ τρεῖς ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι σκοπῶμεν, αἰεὶ τὸν τῶν προτέρων ὕστερον, ἀρχὴν τῶν ὑστέρων τιθέμενοι, εὑρήσομεν ἀπὸ πολλαπλασιασμοῦ σχέσεως, τοῦτ᾽ ἔστι, διπλασίου, πάσας τὰς ἐπιμορίους ἑξῆς ἐπιφαινομένας, ἡμιόλιον, εἶτα ἐπίτριτον, εἶτα ἐπιτέταρτον, καὶ ἐφεξῆς· οὐκ ἀτόπως δ᾽ ἂν εἴη ἐνταῦθα γενομένους, ἐπιμνησθῆναι τῶν ἀκολουθήματος χρησιμεύοντος ἡμῖν, εἰς πλατωνικόν τι θεώρημα. οἱ μὲν ἐ-

ὅρος δυοῖν ἀνὰ μέσον τεταγμένος, τὴν ἀριθμητικὴν πρὸς αὐτοὺς διασώζων μεσότητα· ἴσαι γὰρ αἱ διαφοραὶ αὐτοῦ εἰσὶ πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν τεταγμένους· οὐ μὴν ἔτι καὶ λόγος ὁ αὐτὸς σώζεται ἐν αὐτοῖς. ἐπιστάμεθα δὲ ὡς ἐν τῇ τοιαύτῃ ἐκθέσει, συνημμένη τε καὶ διεζευγμένη γίνεται μεσότης· εἰ μὲν γὰρ ὁ αὐτὸς μέσος ὅρος, πρόλογός τε καὶ ὑπόλογος πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν ὑπακούοι, συνημμένη ἂν εἴη· εἰ δὲ σὺν αὐτῷ ἕτερος, διεζευγμένη γίνεται μεσότης. ἐὰν μὲν οὖν ἐκ τῆς θέσεως ταύτης τρεῖς ἀποτεμόμενοι ὁντινασοῦν παραλλήλους, κατὰ τὴν συνημμένην σκοπῶμεν, ἢ τέσσαρας, ἢ πλείους κατὰ τὴν διεζευγμένην, μονὰς ἂν εἴη πάντων ἡ διαφορά· λόγοι δὲ ἕτεροι ἐκ παντός. ἐὰν δὲ μὴ παραλλήλους, ἀλλὰ διεχεῖς, κατὰ ἴσην μέντοι παράληψιν· πάλιν δὲ ἤτοι τρεῖς, ἢ πλείονας, εἰ μὲν εἷς ὁ παραλειπόμενος εἴη καθ' ἑκάστην ὅρον, δυὰς ἔσται ἡ διαφορὰ πάντων. καὶ πάλιν ἐν τρισὶ μὲν, συνημμένη· ἐν πλείοσι δὲ, διῃρημένη. εἰ δὲ δύο οἱ παραλειπόμενοι, τριὰς πάντως ἡ διαφορὰ ἐν ἅπασι συνημμένοις τε καὶ διῃρημένοις· εἰ δὲ τρεῖς, τετράς· εἰ δὲ τέσσαρες, πεντάς· καὶ τοῦτο ἐφ' ὁποσονοῦν. μετέχει ἄρα ἡ τοιαύτη ποσοῦ μὲν ἴσου, ἐν ταῖς διαφοραῖς· ποιοῦ δὲ, οὐκ ἔτι ἴσου· διὰ τοῦτο ἀριθμητική. εἰ δ' ἔμπαλιν, ποιοῦ μὲν ὁμοίου μετέχει· ποσοῦ δὲ, οὔ· ἦν ἂν γεωμετρικὴ, ἀντ' ἀριθμητικῆς. ἴδιον δὲ ὑπάρχει τῆσδε τῆς μεσότητος, ὃ μηδεμιᾷ ἄλλῃ συμβέβηκε, τὸ κατὰ σύνθεσιν τῶν ἄκρων, ὑποδιπλάσιον ἢ ἴσον τὸ μέσον εἶναι, ἄν τε συνημμένως, ἄν τε διεζευγμένως σκοπῆται, ἄν τε ἐναλλάξ· ἢ γοῦν τὸ μέσον σὺν ἑαυτῷ, ἢ τὰ μέσα σὺν ἀλλήλοις ἴσα τῇ τῶν ἄκρων συνθέσει. ἔτι καὶ ἄλλο ἔχει ἴδιον· ὃν γὰρ ἔχει λόγον ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτὸν, τοῦτον αἱ διαφοραὶ πρὸς διαφορὰς τουτέστιν, ἐν ἰσότητι ἴσην. ἔτι τὸ γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθὸς, ὅτι ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον συγκρινόμενον τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου ἔλαττον αὐτοῦ εὑρίσκεται, τοῦ ὑπὸ τῶν διαφορῶν, ἐάν τε μονάδες ὦσιν, ἐάν τε δυάδες, ἐάν τε τριάδες, ἐάν τε τετράδες, ἐάν τε ὅστις οὖν ἀριθμός. τέταρτον δὲ, ὃ οἱ πρόσθεν πάντες ἐσημειώσαντο, οἱ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις λό-

τῶν κοινοτέρων δὲ λεγομένων μεσότητες τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη· μεθ' ἃς, καὶ ἄλλας τέσσαρας οἱ νεώτεροι εὑρίσκουσι, συμπληροῦντες τὸν δέκατον ἀριθμόν, κατὰ τὸ τοῖς Πυθαγορικοῖς δοκοῦν ὡς τελειότατον· καθ' ὃν καὶ αἱ δεκαχέσεις, ὤφθησαν ἡμῖν πρὸ βραχέος ποσότητα λαμβάνουσαι· ἢ αἱ δὲ λεγόμεναι κατηγορίαι, ἢ τῶν ἡμετέρων χειρῶν καὶ ποδῶν αἱ τῶν ἀκρωτηρίων διαιρέσεις, καὶ χέσις, καὶ ἕτερα μυρία, ἃ κατ' οἰκεῖον τόπον ἐν ἑτέροις ὀψόμεθα· νῦν δὲ περὶ τῶν ἀναλογιῶν, ἄνωθεν τεχνολογητέον· καὶ πρῶτόν γε περὶ τῆς κατὰ τὸ ποσὸν τὴν τῶν ὅρων σύγκεισιν οἰκειούσης ἀλλήλοις καὶ συνδεούσης· ἡ ἔστιν κατὰ τὴν τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους διαφορὰν ἴση κατὰ ποσὸν οὖσα· αὕτη δ' ἂν εἴη ἡ ἀριθμητική· ταύτης γὰρ ἴδιον προαπεδόθη τὸ ποσόν. τίς οὖν ἡ αἰτία, ὅτι περὶ ταύτης πρώτης καὶ οὐ περὶ ἄλλης, ἢ δηλονότι καὶ ἡ φύσις αὐτὴν πρὸ τῶν ἄλλων ἐμφαίνει. ἐν γὰρ τῇ τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ φυσικῇ ἀπὸ μονάδος ἐκθέσει, μηδενὸς παραλειπομένου, μηδ' ὑπεξαιρουμένου σώζεται ὁ ταύτης μόνος λόγος· ἀλλὰ καὶ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἀπεδείξαμεν συλλογισάμενοι καὶ αὐτὴν τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν, πρὸ πασῶν τῶν ἄλλων ὑπάρχειν· συναιροῦσαν μὲν ἑαυτῇ ἐκείνας, οὐ συναναιρουμένην δέ· καὶ συνεπιφερομένην μὲν ἐκείναις, οὐ συνεπιφέρουσαν δέ· ὥστε εἰκότως καὶ ἡ ὁμώνυμος τῇ ἀριθμητικῇ μεσότης οὐκ ἀλόγως προηγήσεται, τῶν ἐν ἐκείναις ὁμωνυμιῶν μεσοτήτων, γεωμετρικῆς τε καὶ ἁρμονικῆς. τῶν γὰρ ὑπεναντίων ἐκδηλότατον, ὅτι πολὺ μᾶλλον ἡγήσεται ὧν πρὸ αὕτη ἡγεμόνος. πρώτιστη ἄρα καὶ ἐξ ἀρχῆς δικαιοτάτη ἡ ἀριθμητικὴ οὖσα φυσικῶς, καὶ παρ' ἡμῶν τυγχανέτω διαρθρώσεως πρό γε τῶν ἄλλων. ἔστι μὲν οὖν ἀριθμητικὴ μεσότης, ὅταν τριῶν ἢ πλειόνων ὅρων ἐφεξῆς ἀλλήλοις κειμένων, ἢ ἐπινοουμένων, ἡ αὐτὴ κατὰ ποσότητα διαφορὰ εὑρίσκηται μεταξὺ τῶν ἐφεξῆς ὑπάρχουσα· μὴ μέν τοι λόγος ὁ αὐτὸς ἐν τοῖς ὅροις, πρὸς ἀλλήλους γίνεται· οἷον, α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ. ἐν γὰρ τῇ φυσικῇ ταύτῃ ἐκθέσει τοῦ ἀριθμοῦ συνεχῶς καὶ ἀνυπερβάτως ἐξεταζομένῃ εὑρίσκεται, πᾶς ὁστισοῦν

ὅρος

μικτῶν. δύναταί γε μὴν καὶ ἐν πλείοσι κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον προχωρεῖν· οἷ τοῦ ἑνὸς, πρὸς τὸν δύο, λόγος ὅτι δύο ὅρων ὑπαρχόντων ὁ διπλάσιος· ἀλλὰ καὶ τοῦ β, πρὸς τὸν δ, ἕτερος λόγος ὅμοιος. ἀναλογία ἄρα, ἡ α, β, δ· λόγων γὰρ σύλληψις ἡ ὅρων τριῶν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θεωρουμένων πρὸς ἀλλήλους· καὶ ἐν πλείοσι δὲ καὶ ἐπιμηκεστέραις ἐκθέσεσι, τὸ αὐτὸ δύναται θεωρεῖσθαι. προσαπτέσθω γὰρ τέταρτος ὅρος ὁ η, μετὰ τὸν δ πάλιν ἐν ὁμοίᾳ σχέσει· διπλασίων γάρ· καὶ πάλιν μετὰ τὸν η, ὁ ις· καὶ ἀεὶ οὕτως. ἐὰν μὲν οὖν ὁ αὐτὸς ὅρος αἰεὶ εἷς καὶ ἀπαράλλακτος, πρὸς τοὺς παρ' ἑκάτερα αὐτοῦ ἀποκρίνηται, πρὸς μὲν τὸν μείζονα ὡς ὑπόλογος· πρὸς δὲ τὸν ἐλάσσονα ὡς πρόλογος, συνημμένη λέγεται ἡ τοιαύτη ἀναλογία· οἷον, α, β, δ, κατὰ ποιότητα· οἷος γὰρ ὁ δ πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς δύο πρὸς τὸν α· καὶ ἀνάπαλιν, οἷος ὁ εἷς πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς β πρὸς τοὺς δ. κατὰ ποσότητα δὲ, οἷον, α, β, γ· ὅσον γὰρ ὁ γ τοῦ β ὑπερέχει, τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β, τοῦ ἑνός· καὶ ἐξ ἐναντίου, ὅσον ὁ α τοῦ β ἐλαττοῦται, τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β, τοῦ γ. ἂν δὲ ἕτερος μὲν ὅρος ὑπακούῃ πρὸς τὸν ἐλάττονα πρόλογος γινόμενος καὶ μείζων, ἕτερος δὲ καὶ μὴ ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν μείζονα ὑπόλογός τε γινόμενος καὶ ἐλάττων οὐκέτι συνημμένη, ἀλλὰ διεζευγμένη λέγεται, ἡ τοιαύτη μεσότης τε καὶ ἀναλογία· οἷον κατὰ μὲν τὸ ποιόν, α, β, δ, η· ὡς γὰρ τὰ β πρὸς τὸ α, οὕτω τὰ η πρὸς τὰ δ· καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ α πρὸς τὰ β, οὕτω τὰ δ πρὸς τὰ η· ἐναλλὰξ, ὡς τὸ α πρὸς τὰ δ, οὕτω τὰ β πρὸς τὰ η· ἢ ὡς τὰ δ πρὸς τὸ α, οὕτω τὰ η πρὸς τὰ β. κατὰ δὲ τὸ ποσὸν, οὕτως, α, β, γ, δ· ὅσῳ γὰρ τὸ α, τοῦ β λείπεται, τοσούτῳ καὶ τὰ γ, τῶν δ· ἢ ὅσῳ τὰ δ τῶν γ πλεονάζει, τοσούτῳ καὶ τὰ β, τοῦ α· ἢ καὶ ἀναμὶξ, ὅσῳ τὰ γ τοῦ α, τοσούτῳ τὰ δ τῶν β· ἢ ὅσῳ λείπεται τὸ α τῶν γ, τοσούτῳ τὰ β, τῶν δ. εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ παρὰ πᾶσι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι Πυθαγόρᾳ καὶ Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει, τρεῖς πρώτισται, ἀριθμητική, γεωμετρική, ἁρμονική· αἱ δὲ ταύταις ὑπεναντίαι, ἄλλαι τρεῖς, ἰδίων μὴ τετευχυῖαι ὀνομάτων·

μεταξὺ τοῦ ιβ καὶ θ, ἐπὶ τέλους, καὶ ἀεὶ οὕτως· καὶ ἑτεροιότητα ταυτὸν, πρὸς τὴν ἑτέρου τοὐναντίον, ὅσον πρὸς τὴν ταυτὸν, ἑτερότητα ἑτέρου· καὶ πάλιν, ὅτι ἀναγκαίως κατὰ πάσας τὰς σχέσεις ἡ αὐτὴ διαφορὰ τῶν δύο ὅρων, μονάδι ἐξηλλαγμένας μέρος λεχθήσεται· τοῦ μὲν, ἥμισυ· τοῦ δὲ, τρίτον ὑπάρχουσα. ἢ τοῦ μὲν, τρίτον· τοῦ δὲ, τέταρτον. ἢ ἄλλως, τοῦ μὲν, τέταρτον· τοῦ δὲ, πέμπτον· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. ὃ δὲ μάλιστα βεβαιώσει ταυτότητος αἰτιώτατον εἶναι τὴν περιττὸν· οὐδέποτε δὲ ἄρτιον, ἐκεῖνο παραδεκτέον ἐν πάσῃ τῇ ἀπὸ μονάδος ἀναλόγῳ ἐκθέσει· ἐν διπλασίῳ μὲν, α, β, δ, η, ιϛ, λβ, ξδ, ρκη, σνϛ· τριπλασίῳ δὲ, α, γ, θ, κζ, πα, σμγ, ψκθ, ͵βρπζ· καὶ μέχρι βούλει, πάντας εὑρήσεις ἐξανάγκης, τοὺς ἐν περιτταῖς χώραις τετραγώνους, ἄλλους δὲ οὐκέτι οὐδαμῇ μηχανῇ· οὐδένα δὲ ἐν ἀρτίᾳ τετράγωνον· ἀλλὰ καὶ οἱ ἰσάκις, ἴσοι ἰσάκις ἅπαντες τοῦτ᾽ ἔστι κύβοι τριχῆ διαστατοὶ ὄντες, καὶ ταυτότητος ἐπὶ πλέον δοκοῦντες μετέχειν, ὥσπερ εἰσὶ περιττῶν, ἀλλ᾽ οὐκ ἀρτίων· ὁ α, καὶ η, καὶ κζ, καὶ ξδ, καὶ ρκε, καὶ σιϛ, καὶ οἱ ἀνάλογοι προχωροῦντες καὶ ἁπλῇ καὶ ποικίλῃ ἐφόδῳ. ἐκτεθέντων γὰρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ᾽ ἄπειρον συνεχῶς περιττῶν, ἐπισκόπει οὕτως, ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ· οἱ δὲ δύο μετ᾽ ἐκεῖνον συντεθέντες, τὸν δεύτερον. οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς, τὸν τρίτον· οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες, τὸν τέταρτον. οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε, τὸν πέμπτον· καὶ οἱ ἑξῆς ἕξ, τὸν ἕκτον· καὶ τοῦτο μέχρις ἀεί. ἐπεὶ δὲ τούτοις καιρὸς ἂν εἴη, τὸν περὶ ἀναλογιῶν λόγον προσθέντας, ἀναγκαιότατον ὄντα εἰς τὰς φυσιολογίας καὶ εἰς τὰ μουσικά τε καὶ σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ θεωρήματα, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ εἰς τὰς τῶν παλαιῶν συναναγνώσεις, τέλος ἐπιθεῖναι τῇ ἀριθμητικῇ εἰσαγωγῇ, τὸ ἁρμόζον ἅμα καὶ συμμετρώτατον· ἔστιν οὖν ἀναλογία κυρίως δυοῖν ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις εἰς τὸ αὐτὸ, κοινότερον δὲ δυοῖν ἢ πλειόνων σχέσεων κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσωνται, διαφορᾷ δὲ, ἢ τινὶ ἑτέρῳ. λόγος μὲν οὖν ἐστι δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις· σύνθεσις δὲ, τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία, ὥστε ἐν ἐλαχίστοις ὅροις τρισὶν αὕτη σύμμικτη.

νομίζουσι. τέσσαρας δέ τινας ἑτέρας μετακινοῦντες τοὺς τούτων ὅρους τε καὶ διαφορὰς, ἐπεξεῦρόν τινες· οὐ πάνυ ἐμφανταζομένας τοῖς τῶν παλαιῶν συγγράμμασιν· ἀλλ' ὡς περιεργότερον λελεπτολογημένας. ἃς ὅμως πρὸς τὸ μὴ δοκεῖν ἀγνοεῖν, ἐπιτροχαστέον τῇ δείξει· πρώτη μὲν γὰρ, αὐτῶν· ἑβδόμη δὲ, ἐν τῇ πασῶν συντάξει ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ τῶν αὐτῶν διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων· οἷον, θ, η, ϛ· ἡμιόλιος γὰρ ὁ λόγος ἑκατέρου συγκείμενος ὁρᾶται. ὀγδόη δὲ μεσότης, ἥτις τούτων δευτέρα ἐστὶ, γίνεται, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων διαφοράν· οἷον ϛ, ζ, θ· καὶ αὕτη γὰρ, ἡμιολίους ἔχει τοὺς δύο· ἡ δὲ θ μὲν πασῶν, συντάξει τρίτη δὲ ἐν τῷ τῶν ἐφευρημένων ἀριθμῷ ὑπάρχει, ὅταν τριῶν ὅρων ὄντων, ὃν λόγον ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, τοῦτον καὶ ἡ τῶν ἄκρων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαχίστων ἔχῃ· ὡς δ, ϛ, ζ. ἡ δὲ ἐπὶ πάσαις δεκάτη μὲν συλλήβδην· τετάρτη δὲ ἐν τῇ τῶν νεωτερικῶν ἐκθέσει ὁρᾶται, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ᾖ, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων, πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μειζόνων· οἷον γ, ε, η· ἐπιδιμερὴς γὰρ ὁ ἐν ἑκατέρᾳ συζυγίᾳ λόγος. ἐπικεφαλαίου γένοιντο οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι, ἐκκείσθωσαν ὑφ' ἓν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον· πρώτης, α, β, γ· δευτέρας, α, β, δ· τρίτης, γ δ, ϛ· τετάρτης, γ, ε, ϛ· πέμπτης, β, δ, ε· ἕκτης, α, δ, ϛ· ἑβδόμης, ϛ, η θ· ὀγδόης, ϛ, ζ, θ· ἐνάτης, δ, ϛ, ζ· δεκάτης, γ, ε, η. λοιπὸν, καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ τριχῆ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτικῆς, ἐν βραχεῖ δὲ ἀρθρώσει μεσότητος, χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πάντα τὴν ἐν μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπήν· κυρίως γὰρ αὕτη καὶ ὡς ἀληθῶς ἁρμονία ἂν λεχθείη μόνη, παρὰ τὰς ἄλλας· εἴπερ μὴ ἐπίπεδος, μὴ δὲ μιᾷ μόνῃ μεσότητι συνδεομένη, ἀλλὰ δυσίν· ἵν' οὕτω τριχῆ διιστάνοιτο· ὡς ὁ κύβος, ἁρμονία πρὸ βραχέος ἐσαφηνίσθη. ὅταν γένωνται δύο ὅρων ἄκρων τριχῆ διαστατῶν ἀμφοτέρων, εἴτε ἰσάκις ἴσων ἰσάκις, ἵνα κύβος ᾖ· ἢ ἰσάκις ἴσων ἀνισάκις, ἵνα ἢ δοκίδες ἢ πλινθίδες ὦσιν· εἴτε ἀνισάκις ἀνίσων ἀνισάκις, ἵνα σκαληνοὶ δύο ὅ-

ροι

καὶ τῇ ἁρμονικῇ ὑπάρχει, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν ἐλαττόνων διαφορὰ, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων ἔχῃ· οἷον, γ, ε, ϛ· ἐν γὰρ διπλασίῳ τὰ συγκείμενα ὁρᾶται· φανερὸν δὲ, καθ' ἃ ἐναντιοῦται τῇ ἁρμονικῇ· τῶν γὰρ αὐτῶν ἄκρων ἀμφοτέραις ὑπαρχόντων, καὶ ἐν διπλασίῳ τε λόγῳ, ἐν μὲν τῇ πρὸ ταύτης, ἡ τῶν μειζόνων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, ὃν αὐτὸν ἔσωζε λόγον. ἐνταῦθα δὲ ἀνάπαλιν, ἡ τῶν ἐλαττόνων, πρὸς τὴν τῶν μειζόνων. ἴδιον δὲ ταύτης ἰστέον ἐκεῖνο, τὸ διπλάσιον ἀποτελεῖσθαι, τὸ ὑπὸ τοῦ μείζονος καὶ μέσου, πρὸς τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ ἐλαχίστου. τοῦ γοῦν πεντάκις τρεῖς, διπλάσιον, τὸ ἑξάκις πέντε· αἱ δὲ δύο μεσότητες, πέμπτη καὶ ἕκτη, παρὰ τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλασθεῖσαι ἀμφότεραι· διαφέρουσι δ' ἀλλήλων, οὕτως· ἡ μὲν πέμπτη ἐστὶν, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ αὐτῶν τούτων διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου πρὸς τὸν μέσον· οἷον, β, δ, ε· διπλάσιος γὰρ, ὁ μὲν δ, τοῦ β, μέσος ὅρος τοῦ ἐλαχίστου· ὁ δὲ β, τοῦ α, ἐλαχίστων διαφορὰ, πρὸς διαφορὰν μεγίστων, τὸ β τοῦ α. ὃ δ' ὑπεναντίον αὐτὴν τῇ γεωμετρικῇ ποιεῖ, ἐκεῖνό ἐστιν, ὅτι ἐπὶ μὲν ἐκείνης, ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα, οὕτως ἡ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ, πρὸς τὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα· ἐπὶ δὲ ταύτης, ἀνάπαλιν· ἡ τοῦ ἐλάττονος πρὸς τὴν τοῦ μείζονος. ἴδιον δ' ὅμως καὶ ταύτης ἐστὶ, τὸ διπλάσιον γίνεσθαι, τὸ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου, τοῦ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου· τὸ γοῦν πεντάκις δ, διπλάσιον τοῦ ὑπὸ πεντάκις β. ἡ δὲ ἕκτη γίνεται, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ᾖ, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν μέσον, οὕτως ἡ τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον ὑπεροχὴ, πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον· οἷον α, δ, ϛ· ἐν ἡμιολίῳ γοῦν ἑκάτεροι λόγῳ· ἐοικυῖα δ' αἰτία καὶ ταύτῃ, τῆς πρὸς γεωμετρικὴν ὑπεναντιότητος. ἀναστρέφεται γὰρ κἀνταῦθα ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης· καὶ αἱ μὲν παρὰ τοῖς πρόσθεν θρυλλούμεναι ϛ μεσότητες· αἱ δὲ εἰσὶ, τρεῖς μὲν αἱ πρωτότυποι μέχρις Ἀριστοτέλους καὶ Πλάτωνος, αἳ ὧδε ἀπὸ Πυθαγόρου διαμείνασαι· τρεῖς δ' ἕτεραι ἐκείναις ὑπεναντίαι τοῖς μετ' ἐκείνους ὑπομνηματογράφοις περὶ τὴν αἵρεσιν ταῖς ἐν χρήσει γινόμεναι.

πλεῖ τῆς ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένου. ἂν δὲ οἱ δύο ἄκροι ὅροι, μὴ ἄρτιοι ἐκτεθῶσιν, ἀλλὰ περισσοί, θ' κε', μεταξὺ ὁ μὲν αὐτὸς ὅρος ὁ ιζ', ἀριθμητικὴν ποιήσει· ἄλλον δὲ τοῦτον, ὅτι ἐφ' ἑκάτερα αὐτοῦ, ἴσῳ ἀριθμῷ ὑπερέβησάν τε καὶ ὑπερέβησαν οἱ ὅροι, τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὸν διατηροῦντες διαφορᾶς ποσότητα· ὁ δὲ ἀντιτεθείς, τὴν γεωμετρικὴν ἀποδίδωσι, τριπλάσιός τε καὶ ὑποτριπλάσιος ἑκατέρου ὤν· ὁ δὲ θ- μεταλαβὼν δὲ μέσος ᾖ, τὴν ἁρμονικὴν ἀποδίδωσιν· οἷς γὰρ μέρεσι μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι, τέσσαρσι πέμπτοις αὐτοῦ τοῦ ἐλάττονος, τούτοις τοῦ μείζονος ἐλάττων ἐστὶν ἐν αὐτοῖς τοῖς μείζονι θεωρουμένοις· τέσσαρσι γὰρ πέμπτοις· καὶ πάντως τὰ προλεχθέντα τὰ ἰδιώματα ἐφαρμόζων, σύμφωνα εὑρήσεις. ἔφοδος δὲ ὡς ἂν εὐτέχνως πλάσσοις τοὺς προδειχθέντας ὅρους κατὰ τρεῖς ἀναλογίαν, τοιαύτη ἔστω σοι, ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προχειρισθέντων ὅρων περισσῶν τε καὶ ἀρτίων, ἀριθμητικὴν μὲν εὑρήσεις, συνθεὶς τὰ ἄκρα τούτων τὸ ἥμισυ μέσον τάξον· ἢ τὴν τοῦ μείζονος ὑπεροχὴν διχῆ τεμὼν καὶ προσθεὶς τῷ ἐλάττονι, μέσον ἕξεις· γεωμετρικὴν δέ, τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων περὶ μήκους, τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρών, μέσον ὅρον ποιήσεις· ἢ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ ὅροι λόγον ἰδών, τοῦτον δίχα τεμών, μέσον ποίησον, δι' ἐπὶ τετραπλασίου, διπλάσιον. ἁρμονικὴν δέ, τῶν ἄκρων τὴν διαφορὰν ποιητέον, ἐπὶ τὸν ἐλάττονα καὶ τὸν γενόμενον παραβλητέον ἐπὶ τὸν συνθετὸν ἐκ τῶν ἄκρων· εἶτα δὲ πλάτος τῆς παραβολῆς προσθετέον τῷ ἐλάττονι, καὶ ἔσται ὁ γινόμενος ἁρμονικὴ μεσότης. καὶ τάδε μὲν περὶ τῶν παρὰ τοῖς παλαιοῖς θρυλλουμένων τριῶν ἀναλογιῶν, ἃς καὶ ἐπὶ τῆδε σαφέστερον καὶ πλατύτερον διηρθρώσαμεν, ὅτι πολλάκις τε καὶ ποικιλώτερον ἐντυγχάνειν αὐταῖς, ἐν τοῖς ἀναγνώσμασι· τὰς δ' ἑξῆς ἐπιθυμητέον, οὐ πάνυ φερομένας παρὰ τοῖς ἀρχαίοις· ἀλλὰ εἰς μόνην ἐμπειρίαν ἡμῶν αὐτῶν, καὶ τὸ οἱονεὶ πλῆρες τοῦ συλλογισμοῦ παραλαμβανομένας. εἰσὶ δὲ αὗται, τάξει ἐκφερόμεναι ὑφ' ἡμῶν, κατὰ ὑπεναντίωσιν τὴν πρὸς τὰς προειρημένας ἀρχετύπους τρεῖς· εἴπερ καὶ ἐξ αὐτῶν τούτων ἀναπλάσσονται, τάξεως τυγχάνουσαι ὁμοίας· τετάρτη μέν, ἡ καὶ ὑπεναντία λεγομένη, διὰ τὸ ἀντικεῖσθαι καὶ ἀντιπεπονθέναι

μὲν ἀριθμητικὴν, ἴσῳ ὑπερέχουσα καὶ ὑπερεχομένην· κατὰ δὲ γεωμετρικὴν, ὁμοίῳ λόγῳ διαφορουμένην· κατὰ δὲ ἁρμονικὴν, τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων τοῦ αὐτοῦ, μείζονός τε καὶ ἐλάττονος, πεπεράσθωσαν δὴ πρῶτον οἱ ὅροι, β· ὧν μεταξὺ αἱ τρεῖς μεσότητες, ζητητέον πῶς ἂν ταγεῖεν καὶ τίνες· καὶ ἔστωσαν ὅ, τε ι καὶ ὁ μ. πρῶτον δὲ τὴν ἀριθμητικὴν ἐναρμόζω, καὶ ἔστιν κε· καὶ τὰ παρακολουθήματα αὐτῆς σώζεται πάντα κἀνταῦθα· ὡς γὰρ ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτὸν, οὕτω καὶ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν ἄρα ἐν ἰσότητι, καὶ ὅσῳ ὁ μείζων τοῦ μέσου, τοσούτῳ καὶ οὗτος τοῦ ἐλάττονος ὑπερφέρει· καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις, διπλασία τοῦ μέσου· καὶ ἡ τῶν ἐλαττόνων ὅρων λόγος μείζων, τοῦ τῶν μειζόνων· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου, τῷ ἀπὸ τῶν διαφορῶν τετραγώνων· καὶ ὁ μέσος τῷ αὐτῷ ἰδίῳ μέρει, καὶ μείζων ὑπάρχει καὶ ἐλάττων τῶν ἄκρων· ἐν δὲ τοῖς ἄκροις θεωρουμένων τρισὶν ὀγδόοις ἑτέρῳ καὶ ἑτέρῳ. ἐὰν δὲ τὴν κ μεσότητα ἐμβάλω, εἰς τοὺς πεπερασμένους ἀρτίους ὅρους, τὰ τῆς γεωμετρικῆς ἰδιώματα ἀνακάμπτει· ὑπαπόλλυται δὲ, τὰ τῆς ἀριθμητικῆς· ὡς γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, οὕτως καὶ ὁ μέσος πρὸς τὸν μικρὸν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· καὶ αἱ διαφοραὶ πρὸς ἀλλήλας ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ θεωροῦνται, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι· καὶ ὄντες ἐν τοῖς ἄκροις καθαροῖς, ἡ τοῦ μέρους ταυτότης καθ' ὑπεροχὴν καὶ ἔλλειψιν, οὔτε ἐν μέσῳ καθαρῷ· ἀλλ' ἐν μέσῳ καὶ θατέρῳ τῶν ἄκρων πρὸς ἃ μέρος ἐν τε μείζοσιν ὅροις καὶ ἐλάττοσιν ἴσος λόγος· ἐὰν δὲ τὸν ιϛ ἀντιλάβω μέσον ὅρον, πάλιν τὰ μὲν τῶν προτέρων δυοῖν μεσοτήτων ἰδιώματα ἐκποδὼν γίνεται. τὰ δὲ τῆς ἁρμονικῆς ἀναφαίνεται, πρὸς τοὺς αὐτοὺς διαμένοντας δύο ἀρτίους ὅρους· ὥσπερ γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν μειζόνων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων. καὶ ὅσοις μέρεσιν ὁ μέσος ἐλάττων τοῦ μείζονος, ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι θεωρουμένοις τοσούτοις ὁ αὐτὸς τοῦ ἐλάττονος μείζων, ἐν αὐτῷ τῷ ἐλάττονι θεωρουμένοις. καὶ ὁ μὲν τοῖς μείζοσιν ὅροις λόγος, μείζων· ἐλάττων δ', ὁ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις λόγος, μείζων· ἐλάττων δ' ὁ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ὅπερ οὐκ ἐπ' ἄλλης. καὶ συντεθέντα τὰ ἄκρα ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντα, διπλάσιον ἀπο-

τελεῖ

τοῦ τε ἐξ ἡμιολίου καὶ τοῦ ἐξ ἐπιτρίτου· ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ τῆς ἐκ
τετραπλασίοις πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων· τινὲς δὲ αὐτὴν ἁρμο-
νικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν, ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ πα-
ρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἁρμονίᾳ· γεωμετρικὴν δὲ ἁρμονίαν
φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰ διαστήματα ἡρμόσθαι, ἰσάκις ἴσα
ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ, ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται· πλευραὶ
μὲν γὰρ παντὸς κύβου, εἰσὶ ιβ· γωνίαι δὲ, η· ἐπίπεδα δὲ, ϛ. μεσότης
ἄρα ὁ η τῶν ϛ καὶ τῶν ιβ, κατὰ τὴν ἁρμονικήν. ὡς γὰρ οἱ ἄκροι
πρὸς ἀλλήλους, οὕτως ἡ τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον διαφορὰ,
πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον διαφορά· καὶ πάλιν ὁ μέ-
σος, ἄλλῳ μὲν ἑαυτοῦ μέρει μείζων ἐστὶ τοῦ ἐλάττονος· ἄλλῳ δὲ, ἐλάτ-
των τοῦ μείζονος· ἐν μέντοι καὶ τῷ αὐτῷ αὐτῶν τῶν ἄκρων
μέρει, καὶ μείζων καὶ ἐλάττων ὑπάρχει. καὶ ἑτέρως οἱ ἄκροι
συντεθέντες καὶ ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντες, διπλάσι-
ον ἀποτελοῦσι τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς ἀλλήλους γινομένου· καὶ
ἡ μὲν, διὰ τεσσάρων, ἐστὶ τοῦ η, πρὸς τὸν ϛ· ἐπίτριτος χώρα· ἡ δὲ διὰ τοῦ
ε̄, τοῦ ιβ πρὸς τὸν η· ἡμιόλιος χώρα· ἡ δὲ διὰ πασῶν ἀμφοῖν οὖσα
σύστημα, ἡ τοῦ ιβ πρὸς ϛ· διπλασία χώρα· ἡ δὲ διὰ πασῶν ἅμα καὶ
διὰ ε̄ τετραπλάσιος οὖσα, ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ, ὑπάρχει πρὸς
τὴν τῶν ἐλαττόνων· ἡ δὲ δὶς διὰ πασῶν, ὁ μέσος ὅρος, πρὸς τὴν
αὐτοῦ καὶ ἐλάττονος διαφοράν. οἰκειότατα ἄρα ἁρμονικὴ προσωνο-
μάσθη. ὥσπερ δὲ ἐν τῇ τοῦ μουσικοῦ κανόνος κατατομῇ χορδῆς μι-
ᾶς τεταμένης, ἢ αὐλικοῦ μήκους ἐκκειμένου τῶν ἄκρων ἀμε-
τακινήτων ὑπαρχόντων, μεταλαμβανούσης δὲ τῆς μεσότητος, ἐν μὲν τῷ
αὐλῷ διὰ τρυπημάτων· ἐν δὲ τῇ χορδῇ, δι' ὑπαγωγέως, ἄλλοτε ἐξ ἄλ-
λου τρόπου, ἀποτελεῖσθαι δύνανται αἱ προλεχθεῖσαι μεσότητες,
ἀριθμητική τε καὶ γεωμετρικὴ καὶ ἁρμονική· ἵνα εἰκότως καὶ ἐτυ-
μότατα καλοῖντο, διὰ τὴν τοῦ μέσου ὅρου μετάστασίν τε καὶ μετα-
χώρησιν διαφόρως συντελούμεναι. οὕτως καὶ ἐν ἀριθμητικοῖς δυ-
σὶν ὅροις εἴ τε περισσοῖς ἀμφοτέροις, εἴ τε καὶ ἀρτίοις εὔλογόν ἐστι
καὶ ἅμα δυνατὸν μένουσιν ἐν τῷ αὐτῷ καὶ μὴ μεταβιβαζομένοις,
μεσότητα καθ' ἑκάστην τῶν τριῶν ἐφαρμόζουσαν ἐντάσσεσθαι· πρῶτον
μὲν

ἀλλήλους παρεχομένη· ἡ δὲ γεωμετρική, ὁμοιότητι τὰς σχέσεις ὁμοίας κατὰ τὸ ποιὸν τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους ἀποδιδοῦσα· αὕτη δέ, κατὰ τὸ πρὸς ἕτερόν πως ἐν ἑτέροις εἴδεσι φανταζομένη. ἐφεξῆς πάντων κατὰ συνέχειαν κειμένων τῶν ἀριθμῶν ἀεὶ ὁ δεύτερος τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ὑπερέχει μονάδι· ὁ δύο, τοῦ ἑνός· ὁ γ, τοῦ β· ὁ δ, τοῦ γ. λόγοι δέ, οὐχ οἱ αὐτοί· ὁ μὲν γὰρ δ, τοῦ γ ἐστὶν ἐπίτριτος· ὁ δὲ γ, τοῦ β ἡμιόλιος· ὁ δὲ δύο, τῆς μονάδος διπλάσιος. οὔτε γὰρ ἐν ὅροις μόνον, οὔτε ἐν διαφοραῖς μόνον· ἀλλ' ἐκ μέρους μέν, ἐν ὅροις· ἐκ μέρους δέ, ἐν διαφοραῖς. ὡς γὰρ ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ πρὸς τὸν αὐτὸν μέσον, πρὸς τὴν τοῦ ἐλαχίστου πρὸς τὸν αὐτὸν μέσον· καὶ ἀνάπαλιν. ὁ δὲ πρὸς τι ἐπιγνῶμεν ἐν τῇ τοῦ ὄντος αἰώθερον φρασθείσῃ διαιρέσει, τῆς ἁρμονικῆς ἴδιον θεωρίας· ἀλλὰ καὶ οἱ μουσικοὶ τοὺς ἐν ἁρμονίᾳ συμφωνιῶν λόγους, ἐν ταύτῃ μᾶλλον εὑρίσκονται τῇ μεσότητι. στοιχειωδέστατος μέν, ὁ διὰ τεσσάρων, ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ· ὡς δ πρὸς τὰ γ, ὅρος πρὸς ὅρον. ἐν τῷ κατὰ τὸν διπλάσιον ὑποδείγματι, ἡ διαφορὰ πρὸς διαφοράν, ἐν τῷ κατὰ τὸ τριπλάσιον· τοῦ γὰρ ς πρὸς β· ἢ πάλιν, τοῦ ς πρὸς γ, αὗται αἱ διαφοραί. μετὰ δὲ τοῦτον εὐθύς, ὁ διὰ πέντε ὑπάρχων ἡμιόλιος τοῦ γ, πρὸς β· ἢ πάλιν τοῦ ς, πρὸς δ· ὅρου πρὸς ὅρον. εἶτα τούτων ἀμφοτέρων σύστημα, τοῦ τε ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου, ὁ διὰ πασῶν ἐφεξῆς αὐτοῖς κείμενος, ἐν διπλασίῳ ὑπάρχων λόγῳ, ὡς ς πρὸς γ, ἐν ἀμφοτέροις ὑποδείγμασιν, ὅροις πρὸς ὅρον· ἢ ὁ ἐπὶ τούτῳ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ ε τριπλάσιον σώζων ἀμφοτέρως ἅμα τὸν λόγον, σύστημα ὑπάρχων διπλασίου ἅμα καὶ ἡμιολίου· ὥσπερ τοῦ ς πρὸς β, ὅρου, ἐν τῷ κατὰ τὸν τριπλάσιον ὑποδείγματι· καὶ πάλιν διαφορᾶς πρὸς διαφοράν, ἐν τῷ αὐτῷ· ἐν δὲ τῷ κατὰ τὸ διπλάσιον ὅρου μεγίστου πρὸς διαφορὰν αὐτοῦ καὶ τοῦ μέσου, ἢ διαφορᾶς τῶν ἄκρων, πρὸς διαφορὰς τῶν ἐλαττόνων. τελευταῖον δὲ καὶ μέγιστον σύμφωνον τὸ λεγόμενον δὶς διὰ πασῶν, ὡσανεὶ δὶς διπλάσιον· ὑπάρχον δὲ ἐν λόγῳ τετραπλασίῳ, ὡς ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἐν διπλασίοις, πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων διαφοράν,

τοῦ τε

διαφέρουσιν. ἔστι γὰρ ἡ τῇ τρίτῃ τάξει μεσότης ἁρμονικὴ καλουμένη, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ὁ μέσος θεωρῆται πρὸς τοὺς ἄκρους μήτε ἐν λόγῳ τῷ αὐτῷ ἐξεταζόμενος, τοῦ μὲν προλόγου, τοῦ δὲ ὑπολόγου, ὡς ἤδη τῆς γεωμετρικῆς· μήτε ἐν διαστήμασι μὲν ἴσοις, λόγων δὲ ἑτερότητι, ὡς ἤδη τῆς ἀριθμητικῆς· ἀλλ᾽ ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ὅρον ἔχῃ, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ τὸν μέσον πρὸς τὴν τοῦ μέσου διαφορὰν παρὰ τὸν ἐλάχιστον· οἷον, γ, δ, ϛ· ἢ πάλιν, β, γ, ϛ· ὁ γὰρ ϛ τοῦ δ, τῷ αὐτοῦ τρίτῳ ὑπερέχει· τρίτον γὰρ τοῦ ϛ, τὰ β· καὶ ὁ γ, τοῦ δ λείπεται, τῷ αὐτοῦ τρίτῳ· τοῦ γὰρ τρία, τρίτον μονάς. ἤδη μὲν γὰρ τοῦ προτέρου ὑποδείγματος, οἵ τε ἄκροι ἐν διπλασίονι λόγῳ, καὶ αἱ τούτων πρὸς τὸν μέσον διαφοραί, πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ διπλασίῳ πρὸς ἀλλήλας· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, ἑκατέρα ἐν τῷ τριπλασίῳ. ἰδίωμα δὲ ἔχει ὑπεναντίον, ὡς προέφαμεν, τῷ κατὰ τὴν ἀριθμητικήν. ἐκεῖ γὰρ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις, μείζονες ἦσαν οἱ λόγοι· ἐλάττονες δὲ, ἐν τοῖς μείζοσιν. ὧδε δὲ ἀνάπαλιν, οἱ μὲν ἐν τοῖς μείζοσι, μείζονες· οἱ δὲ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ἐλάττονες· ἵνα ὡς ἐν μεσότητι ἀμφοῖν τῇ γεωμετρικῇ, εἰκότως ἡ τῶν ἑκατέρωθι λόγων ἰσότης μεταίχμιον οὖσα τοῦ μείζονος καὶ ἐλάττονος ἐνθεωρῆται. ἔτι ἐν μὲν τῇ ἀριθμητικῇ, ὁ μέσος ἑαυτοῦ, μέρει τῷ αὐτῷ μείζων τε καὶ ἐλάττων τῶν ἑκατέρωθι φαίνεται· αὐτῶν δὲ ἐκείνων τῶν ὅρων, τῶν ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ μείζων ἢ ἐλάττων. ἐν δὲ τῇ ἁρμονικῇ ταύτῃ ὑπεναντίως· ἑαυτοῦ μὲν γὰρ ὁ μέσος ἑτέρῳ καὶ ἑτέρῳ, μείζων καὶ ἐλάττων τῶν ἑκατέρωθί ἐστιν· αὐτῶν δὲ ἐκείνων ἑκατέρωθι πάντως, τῷ αὐτῷ· ἤτοι γὰρ ἑκατέρων ἡμίσει, ἢ ἀμφοτέρων τρίτῳ. ἡ δὲ γεωμετρικὴ ὡς ἐν μεταιχμίῳ ἀμφοῖν, οὔτε ἐν μέσῳ μόνον, οὔτε ἐν τοῖς ἄκροις μόνον· ἀλλὰ καὶ ἐν ἀμφοτέροις, μέσῳ καὶ ἄκρῳ. ἔτι ἡ ἁρμονική, ἔχει ἴδιον συμβεβηκὸς τὸ τοὺς ἄκρους συντεθέντας, καὶ πολυπλασιασθέντας ὑπὸ τοῦ μέσου, διπλάσιον ἀποτελεῖν, τοῦ ἐξ ἀλλήλων πολυπλασιασμοῦ. ἐκλήθη δὲ ἁρμονικὴ ἡ τοιαύτη μεσότης, ὅτι ἡ μὲν ἀριθμητικὴ προσφῶς διεκρίνετο, ἰσότητα κατὰ τὸ ποσὸν ἐν τῇ τῶν ὅρων διαστάσει, πρὸς

ἐπίπεδοι μιᾷ μεσότητι συνέχονται πάντως· οἱ δὲ στερεοί, δυσὶν ἀνάλογον κειμέναις. δύο γὰρ τετραγώνων συνεχῶν, εἷς μόνος εὑρίσκεται μέσος, ἀναλογίαν σώζων γεωμετρικήν· πρόλογος μὲν, πρὸς τὸν ἐλάττονα· ὑπόλογος δὲ, πρὸς τὸν μείζονα· οὐδέποτε δὲ πλείονες. δύο ἄρα διαστήματα θεωρούμενα πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ τοῦ μέσου ἐν σχέσει λόγων ὁμοίων. πάλιν δὲ δύο κύβων συνεχῶν, δύο μόνοι εὑρίσκονται ἀνάλογοι μέσοι ὅροι κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν· πλείονες δὲ, οὐδέποτε. τρία ἄρα διαστήματα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν μέσων πρὸς ἀλλήλους· δύο δὲ, τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων πρὸς τοὺς μέσους ἑκατέρωθεν· οὕτω τὰ μὲν στερεὰ σχήματα λέγεται τριχῆ διαστατά· τὰ δὲ, ἐπίπεδα διχῆ· οἷον, ὁ α καὶ ὁ δ, ἐπίπεδοι· μέσος δὲ ἀνάλογον, ὁ β. ἢ οἱ, δ, θ, δύο τετράγωνοι· μέσος δὲ, αὐτῶν ἀνάλογον ὁ ϛ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐχόμενος ὑπὸ τοῦ μείζονος, καὶ ἔχων τὸν ἐλάττονα, ἐν ᾧ καὶ ἡ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν ἔχει· τούτου δ᾽ αἴτιον, ὅτι αἱ τῶν δύο τετραγώνων πλευραί, ἑκατέρα μία ἰδία, αὐτὸν τὸν ϛ ἅμα ἀμφότεραι ἐγεννήκασιν· ἐν δὲ κύβοις (οἷον τῷ η καὶ τοῖς κζ) μία μὲν οὐκέτι· δύο δὲ μεσότητες εὑρίσκονται, ὅ, τε ιβ, καὶ ὁ ιη, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑαυτάς τε καὶ τοὺς ὅρους ποιοῦσαι, ἐν ᾧ καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας εἰσί. καὶ τούτου δ᾽ αἴτιον, τὸ τῶν κυβικῶν πλευρῶν μίγδην σύστημα τὰς β μεσότητας· δὶς δύο, τρὶς τρεῖς, δίς· ἐὰν μὲν γὰρ καθόλου τετράγωνος τετράγωνον λάβῃ, τουτέστι, πολυπλασιάζῃ, τετράγωνον, πάντως ποιεῖ· ἐὰν δὲ τετράγωνος ἑτερομήκης, οὐδέποτε τετράγωνος ἀποτελέσῃ, κἂν κύβος κύβον, κύβος πάντως γεννήσῃ· ἐὰν δὲ ἑτερομήκης, κύβον ἑτερομήκη, οὐδέποτε κύβος· καθάπερ ἀμέλει ἂν ἄρτιος ἄρτιον πολυπλασιάσῃ, πάντως ἄρτιος γεννᾶται· κἂν περισσὸς περισσόν, πάντως περισσός· ἂν δὲ περισσὸς ἄρτιον, ἢ ἄρτιος περισσόν, πάντως ὁ γινόμενος ἔσται ἄρτιος, οὐδέποτε δὲ περισσός. ταῦτα δέ, τῆς οἰκείας σαφηνείας ἐπιλήψεται ἐν τῇ πλατωνικῇ συναναγνώσει κατὰ τὸν τοῦ λεγομένου γάμου τόπον ἐν τῇ πολιτείᾳ, ἀπὸ προσώπου τῶν μουσῶν παρεισαγομένου· ὥστε ἐπὶ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τὴν καλουμένην ἁρμονικὴν μεταβάντες

διαιρῶ-

γεωμετρικὴ μεσότης, ὃ μηδεμία τῶν λοιπῶν, τὸ τὰς τῶν ὅρων διαφορὰς ἐν λόγῳ πρὸς ἀλλήλας ὑπὸ ταὐτὸν εἶναι, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι πρὸς τοὺς συνεχεῖς οἱ μείζονες πρὸς τοὺς ἐλάσσονας· καὶ τὰς ἀνάπαλιν. ἔτι καὶ ἕτερον ἰδίωμα, τὸ τοὺς μείζονας ὅρους διαφορὰν ἔχειν πρὸς τοὺς ἐλάσσονας αὐτοὺς τοὺς ἐλάσσονας, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν αὐτῇ τῇ ἐλάσσονι διαφέρειν· ἐν διπλασίῳ λόγῳ ἐπιλαμβανομένων τῶν ὅρων. ἐν δὲ τριπλασίῳ, διαφορὰς ἕξουσι δὶς τὴν ὑπ᾽ αὐτὸν οἱ ὅροι καὶ αἱ διαφοραί· ἐν τετραπλασίῳ δὲ τρεῖς· καὶ ἐν πενταπλασίῳ τετράκις· καὶ τοῦτο μέχρι παντός. οὐ μόνον δὲ ἐν πολλαπλασίοις ἀναλογίαι γίνονται γεωμετρικαί, ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιμορίοις εἴδεσιν ἅπασι, καὶ ἐπιμερέσι καὶ μικτοῖς. καὶ τὸ ἐξαίρετον ἰδίωμα τῆς μεσότητος ταύτης, ἐπὶ πασῶν σώζεται· τῶν μὲν συνημμένων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· τῶν δὲ ἐν διαζεύξει ἢ καὶ ἐν πλείοσιν ὅροις, κἂν συνημμένοι ὦσιν, ἀρτιοταγὲς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. παράδειγμα δὲ τοῦ ἐν πάσαις ταῖς σχέσεσι πολυπλασίαις τε παντοίαις καὶ ἐπιμερέσι παντοίαις, καὶ μικταῖς παντοίαις, τὸ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἰδίωμα σώζεσθαι, ἔσω ἱκανὸν καὶ αὐταρκὲς ἡμῖν ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ἀπὸ ἰσότητος ἐπλασάμεθα κατὰ τὰ τρία προστάγματα πάντα τὰ τοῦ ἀνίσου εἴδη ἐξ ἀλλήλων, ὀρθῶς τε τιθεμένων, καὶ ἀναστρεφομένων. ἑκάστη γὰρ πλάσις, ἢ ἔκθεσις, ἀναλογία ἐστὶ γεωμετρική, πάντα τὰ λεχθέντα ἰδιώματα περιέχουσα· καὶ τέταρτον, τὸν ἔν τε μείζοσιν ὅροις ἔν τε ἐλάσσοσι, τὸν αὐτὸν διαφυλάττειν λόγον. ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸν κοινὸν στίχον ἑτερομηκῶν τε καὶ τετραγώνων ἐκθώμεθα ἓν παρ᾽ ἓν περιέχοντα τοὺς ἐν ἀμφοτέροις αὐτοῖς· εἶτα κατὰ τρεῖς ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι σκοπῶμεν, ἀεὶ τὸν τῶν προτέρων ὕστερον, ἀρχὴν τῶν ὑστέρων τιθέμενοι, εὑρήσομεν ἀπὸ πολλαπλασιασμοῦ σχέσεως, τῆς τε ἐστί, διπλασίου, πάσας τὰς ἐπιμορίους ἑξῆς ἐπιφαινομένας, ἡμιόλιον, εἶτα ἐπίτριτον, εἶτα ἐπιτέταρτον, καὶ ἐφεξῆς. εὐκαιρότατον δ᾽ ἂν εἴη ἐνταῦθα γενομένους, ἐπιμνησθῆναι τοῦ παρακολουθήματος χρησιμεύοντος ἡμῖν, εἰς πλατωνικόν τι θεώρημα. οἱ γὰρ ἐ-

 πίπεδοι

ὅρος δυοῖν ἀνὰ μέσον πεταγμένος, τὴν ἀριθμητικὴν πρὸς αὐτοὺς διασώζων μεσότητα· ἴσαι γὰρ αἱ διαφοραὶ αὐτοῦ εἰσὶ πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν πεταγμένους· οὐ μὴν ἔτι καὶ λόγος ὁ αὐτὸς σώζεται ἐν αὐτοῖς. ἰστέον δὲ ὡς ἐν τῇ τοιαύτῃ ἐκθέσει, συνημμένη τε καὶ διεζευγμένη γίνεται μεσότης· εἰ μὲν γὰρ ὁ αὐτὸς μέσος ὅρος, πρόλογός τε καὶ ὑπόλογος πρὸς τοὺς ἑκατέρωθεν ὑπακούοι, συνημμένη ἂν εἴη· εἰ δὲ σὺν αὐτῷ ἕτερος, διεζευγμένη γίνεται μεσότης. ἐὰν μὲν οὖν ἐκ τῆς ἐκθέσεως ταύτης τρεῖς ἀπτομένους ὁσουδηνασοῦν παραλλήλους, κατὰ τὴν συνημμένην σκοπῶμεν, ἢ τέσσαρας, ἢ πλείους κατὰ τὴν διεζευγμένην, μονὰς ἂν εἴη πάντων ἡ διαφορά· λόγοι δὲ ἕτεροι ἐκ παντός. ἐὰν δὲ μὴ παραλλήλους, ἀλλὰ διεχεῖς, κατὰ ἴσην μέντοι παράληψιν· πάλιν δὲ ἤτοι τρεῖς, ἢ πλείονας, εἰ μὲν εἷς ὁ παραλειπόμενος εἴη καθ' ἑκάστην ὅρου, δυὰς ἔσται ἡ διαφορὰ πάντων. καὶ πάλιν ἐν τρισὶ μὲν, συνημμένη· ἐν πλείοσι δὲ, διῃρημένη. εἰ δὲ δύο οἱ παραλειπόμενοι, τριὰς πάντως ἡ διαφορὰ ἐν ἅπασι συνημμένοις τε καὶ διῃρημένοις· εἰ δὲ τρεῖς, τετράς· εἰ δὲ τέσσαρες, πεντάς· καὶ τοῦτο ἐφ' ὁποσονοσοῦν. μετέχει ἄρα ἡ τοιαύτη ποσοῦ μὲν ἴσου, ἐν ταῖς διαφοραῖς· ποιοῦ δὲ, οὐκ ἔτι ἴσου· διὰ τοῦτο ἀριθμητική. εἰ δ' ἔμπαλιν, ποιοῦ μὲν ὁμοίου μετέχει· ποσοῦ δὲ, οὔ· τὴν ἂν γεωμετρική, ἀντὶ ἀριθμητικῆς. ἴδιον δὲ ὑπάρχει τόδε τῆς μεσότητος, ὃ μηδεμιᾷ ἄλλῃ συμβέβηκε, τὸ κατὰ σύνθεσιν τῶν ἄκρων, ὑποδιπλάσιον ἢ ἴσον τὸ μέσον εἶναι, ἄν τε συνημμένως, ἄν τε διεζευγμένως σκοπῆται, ἄν τε ἐναλλάξ· ἤγουν τὸ μέσον σὺν ἑαυτῷ, ἢ τὰ μέσα σὺν ἀλλήλοις ἴσα τῇ τῶν ἄκρων συνθέσει. ἔτι καὶ ἄλλο ἔχει ἴδιον· ὃν γὰρ ἔχει λόγον ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτὸν, τοῦτον αἱ διαφοραὶ πρὸς διαφοράς· τουτέστιν, ἐν ἰσότητι ἴσῃ. ἔτι τὸ γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθὸς, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον συγκρινόμενον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἔλαττον αὐτοῦ εὑρίσκεται, τῷ ὑπὸ τῶν διαφορῶν, ἐάν τε μονάδες ὦσιν, ἐάν τε δυάδες, ἐάν τε τριάδες, ἐάν τε τετράδες, ἐάν τε ὁστισοῦν ἀριθμός. τέταρτον δὲ, ὃ οἱ πρόσθεν πάντες ἐσημειώσαντο, οἱ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις λό-

τῶν κοινότερον δὲ λεγόμεναι μεσότητες τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη· μεθ' ἃς, καὶ ἄλλας τέσσαρας οἱ νεώτεροι εὑρίσκουσι, συμπληροῦντες τὸν δέκατον ἀριθμόν, κατὰ τὸ τοῖς Πυθαγορείοις δοκοῦν ὡς τελειότατον· καθ' ὃν καὶ αἱ δεκαχέσεις, ὤφθησαν ἡμῖν πρὸ βραχέος ποσότητα λαμβάνουσαι· καὶ αἱ δὲ λεγόμεναι κατηγορίαι, καὶ τῶν ἡμετέρων χειρῶν καὶ ποδῶν αἱ τῶν ἀκρωτηρίων διαιρέσεις, καὶ χέσεις, καὶ ἕτερα μυρία, ἃ κατ' οἰκεῖον τόπον ἐν ἑτέροις ὀψόμεθα· νῦν δὲ περὶ τῶν ἀναλογιῶν, ἄνωθεν τεχνολογητέον· καὶ πρῶτόν γε περὶ τῆς κατὰ τὸ ποσὸν τὴν τῶν ὅρων σύγκεισιν οἰκειούσης ἀλλήλοις καὶ συνδεούσης· ἥ ἐστιν κατὰ τὴν τῶν ὅρων πρὸς ἀλλήλους διαφορὰν ἴση κατὰ ποσὸν οὖσα· αὕτη δ' ἂν εἴη ἡ ἀριθμητική· ταύτης γὰρ ἴδιον προαπεδόθη τὸ ποσόν. τίς οὖν ἡ αἰτία, ὅτι περὶ ταύτης πρώτης καὶ οὐ περὶ ἄλλης, ἢ δηλονότι καὶ ἡ φύσις αὐτὴν πρὸ τῶν ἄλλων ἐμφαίνει. ἐν δὲ τῇ τοῦ ἁπλοῦ ἀριθμοῦ φυσικῇ ἀπὸ μονάδος ἐκθέσει, μηδενὸς παραλειπομένου, μηδ' ὑπεξαιρουμένου σώζεται ὁ ταύτης μόνος λόγος· ἀλλὰ καὶ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἀπεδείξαμεν συλλογιζόμενοι καὶ αὐτὴν τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν, πρὸ πασῶν τῶν ἄλλων ὑπάρχειν· συναναιροῦσαν μὲν ἑαυτῇ ἐκείνας, οὐ συναναιρουμένην δέ· καὶ συνεπιφερομένην μὲν ἐκείναις, οὐ συνεπιφέρουσαν δέ· ὥστε εἰκότως καὶ ἡ ὁμώνυμος τῇ ἀριθμητικῇ μεσότης οὐκ ἀλόγως προηγήσεται, τῶν ἐν ἐκείναις ὁμωνυμῶν μεσοτήτων, γεωμετρικῆς τε καὶ ἁρμονικῆς. τῶν γὰρ ὑπεναντίων ἐκδηλότατον, ὅτι πολὺ μᾶλλον ἡγήσονται ὧνπερ αὐταὶ ἡγεμόνες. πρωτίστη ἄρα καὶ ἐξ ἀρχῆς δικαιοτάτη ἡ ἀριθμητικὴ οὖσα φυσικῶς, καὶ παρ' ἡμῶν τυγχανέτω διαρθρώσεως πρό γε τῶν ἄλλων. ἔστι μὲν οὖν ἀριθμητικὴ μεσότης, ὅταν τριῶν ἢ πλειόνων ὅρων ἐφεξῆς ἀλλήλοις κειμένων, ἢ ἐπινοουμένων, ἡ αὐτὴ κατὰ ποσότητα διαφορὰ εὑρίσκηται μεταξὺ τῶν ἐφεξῆς ὑπάρχουσα· μὴ μέντοι λόγος ὁ αὐτὸς ἐν τοῖς ὅροις, πρὸς ἀλλήλους γίνεται· οἷον, α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ. ἐν γὰρ τῇ φυσικῇ ταύτῃ ἐκθέσει τοῦ ἀριθμοῦ συνεχῶς καὶ ἀνυπερβάτως ἐξεταζομένῃ εὑρίσκεται, πᾶς ὁστισοῦν

ὅρος

μηκται. δύναται γε μὴν καὶ ἐν πλείοσι κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον
προχωρεῖν· διὰ τοῦ ἑνὸς, πρὸς τὸν δύο, λόγος ἐστὶ δύο ὅρων ὑπαρχόν-
των εἷς ὁ διπλάσιος· ἀλλὰ καὶ τοῦ β, πρὸς τὸν δ, ἕτερος λόγος
ὅμοιος. ἀναλογία ἄρα, ἡ α, β, δ· λόγων γὰρ σύλληψις ἡ ὅρων
τριῶν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θεωρουμένων πρὸς ἀλλήλους. καὶ
ἐν πλείοσι δὲ καὶ ἀπειρομεγέθεσιν ἐκθέσεσι, τὸ αὐτὸ δύναται θε-
ωρεῖσθαι. προσπλεκέσθω γὰρ τέταρτος ὅρος ὁ η, μετὰ τὸν δ πάλιν
ἐν ὁμοίᾳ σχέσει· διπλασίων γάρ· καὶ πάλιν μετὰ τὸν η, ὁ ις· καὶ
ἀεὶ οὕτως. ἐὰν μὲν οὖν ὁ αὐτὸς ὅρος αἰεὶ εἷς καὶ ἀπαράλλακ-
τος, πρὸς τοὺς παρ' ἑκάτερα αὐτοῦ ἀντικρίνηται, πρὸς μὲν τὸν μεί-
ζονα ὡς ὑπόλογος, πρὸς δὲ τὸν ἐλάσσονα ὡς πρόλογος, συνημμ-
μένη λέγεται ἡ τοιαύτη ἀναλογία· οἷον, α, β, δ, κατὰ ποιότητα·
οἷος γὰρ ὁ δ πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς δύο πρὸς τὸν α· καὶ
ἀνάπαλιν, οἷος ὁ εἷς πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς β πρὸς τὸν
δ. κατὰ ποσότητα δὲ, οἷον, α, β, γ· ὅσον γὰρ ὁ γ τοῦ β ὑπερέχει,
τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β, τοῦ ἑνός· καὶ ἐξ ἐναντίου, ὅσον ὁ α τοῦ β ἐ-
λαττοῦται, τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β, τοῦ γ. ἂν δὲ ἕτερος μὲν ὅ-
ρος ὑπακούῃ πρὸς τὸν ἐλάττονα πρόλογος γινόμενος καὶ μεί-
ζων, ἕτερος δὲ καὶ μὴ ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν μείζονα ὑπόλογός τε
γινόμενος καὶ ἐλάττων οὐκέτι συνημμένη, ἀλλὰ διεζευγμένη
λέγεται, ἡ τοιαύτη μεσότης τε καὶ ἀναλογία· οἷον κατὰ μὲν τὸ ποιὸν,
α, β, δ, η. ὡς γὰρ τὰ β πρὸς τὸ α, οὕτω τὰ η πρὸς τὰ δ· καὶ ἀνά-
παλιν, ὡς τὸ α πρὸς τὰ β, οὕτω τὰ δ πρὸς τὰ η· ἐναλλὰξ, ὡς τὸ
α πρὸς τὰ δ, οὕτω τὰ β πρὸς τὰ η· ἢ ὡς τὰ δ πρὸς τὸ α, οὕτω
τὰ η πρὸς τὰ β. κατὰ δὲ τὸ ποσὸν, οὕτως, α, β, γ, δ· ὅσῳ γὰρ τὸ
α, τῶν β λείπεται, τοσούτῳ καὶ τὰ γ, τῶν δ· ἢ ὅσῳ τὰ δ τῶν γ
πλεονάζει, τοσούτῳ καὶ τὰ β, τοῦ α· ἢ καὶ ἀναμὶξ, ὅσῳ τὰ γ τοῦ
α, τοσούτῳ τὰ δ τῶν β· ἢ ὅσῳ λείπεται τὸ α τῶν γ, τοσούτῳ
τὰ β, τῶν δ. εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ παρὰ πᾶ-
σι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι Πυθαγόρᾳ τε Πλάτωνι τε Ἀρι-
στοτέλει, τρεῖς πρῶται, ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ, ἁρμονική. αἱ δὲ
ταύταις ὑπεναντίαι, ἄλλαι τρεῖς, ἰδίων μὴ τετυχυῖαι ὀνομά-
των·

μεταξὺ τοῦ ιβ καὶ θ, ἐπιτρίτως, καὶ ἀεὶ οὕτως· καὶ ἑτερότητι ταυτὸν, πρὸς τῇ ἑτέρῳ ὅρῳ τοὐναντίον, ὁπόσον τῇ ταυτὸν, ἑτερότητι ἑτέρον· καὶ πάλιν, ὅτι ἀναγκαίας κατὰ πάσας τὰς σχέσεις ἡ αὐτὴ διαφορὰ τῶν δύο ὅρων, μονάδι ἐξηλλαγμένας μέρος λεχθήσεται· τοῦ μὲν, ἥμισυ· τοῦ δὲ, τρίτον ὑπάρχουσα. ἢ τοῦ μὲν, τρίτον· τοῦ δὲ, τέταρτον. ἢ ἄλλως, τοῦ μὲν, τέταρτον· τοῦ δὲ, πέμπτον· καὶ ἐφεξῆς οὕτως. ὃ δὲ μάλιστα βεβαιώσει ταυτότητος αἰτιώτατον εἶναι τὸν περισσὸν οὐδέποτε δὲ ἄρτιον, ἐκεῖνο παραδεικτέον ἐν πάσῃ τῇ ἀπὸ μονάδος ἀναλόγῳ ἐκθέσει· οἷον διπλασίῳ μὲν, α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς· τριπλασίῳ δὲ, α, γ, θ, κζ, πα, σμγ, ψκθ, ͵βρπζ· καὶ μέχρι βούλει, πάντας εὑρήσεις ἐξανάγκης, τοὺς ἐν περισσαῖς χώραις τετραγώνους, ἄλλους δὲ οὐκέτι οὐδεμιᾷ μηχανῇ· οὐδένα δὲ ἐν ἀρτίᾳ τετράγωνον· ἀλλὰ καὶ οἱ ἰσάκις ἰσάκις ἰσάκις ἅπαντες τοῦτ᾽ ἔστι κύβοι τριχῇ διαστατοὶ ὄντες, καὶ ταυτότητος ἐπιπλέον δοκοῦντες μετέχειν, ἑτέρων εἰσὶ περισσῶν, ἀλλ᾽ οὐκ ἀρτίων· ὁ α, καὶ η, καὶ κζ, καὶ ξδ, καὶ ρκε, καὶ σις, καὶ οἱ ἀνάλογοι προχωροῦντες καὶ ἁπλῇ γε καὶ ποικίλῃ ἐφόδῳ. ἐκτεθέντων γὰρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ᾽ ἄπειρον συνεχῶς περισσῶν, ἐπισκόπει οὕτως, ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ· οἱ δὲ δύο μετ᾽ ἐκεῖνον συντεθέντες, τὸν δεύτερον. οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς, τὸν τρίτον. οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες, τὸν τέταρτον. οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε, τὸν πέμπτον· καὶ οἱ ἑξῆς ἕξ, τὸν ἕκτον· καὶ τοῦτο μέχρις ἀεί. ἐπεὶ δὲ τούτοις καιρὸς ἂν εἴη, τὸν περὶ ἀναλογιῶν λόγον προσθέντας, ἀναγκαιότατον ὄντα εἰς τὰς φυσιολογίας καὶ εἰς τὰ μουσικά τε καὶ σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ θεωρήματα, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ εἰς τὰς τῶν παλαιῶν συναναγνώσεις, τέλος ἐπιθεῖναι τῇ ἀριθμητικῇ εἰσαγωγῇ, τὸ ἁρμόζον ἅμα καὶ συμμετρώτατον· ἔστιν οὖν ἀναλογία κυρίως δυοῖν ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις εἰς τὸ αὐτὸ, κοινότερον δὲ δυοῖν ἢ πλειόνων σχέσεων· κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσονται, διαφορᾷ δὲ, ἢ ἄλλῳ τινὶ ἑτέρῳ. λόγος μὲν οὖν ἐστὶ δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις· σύνθεσις δὲ, τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία, ὥς τε ἐν ἐλαχίστοις ὅροις τρισὶν αὕτη σύμμικτη.

χέσεις, ἐν τρισὶν ὅροις. ὃν γὰρ ὁ δεύτερος πρὸς τὸν πρῶτον χέσιν ἔχει, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον· καὶ ὃν ὁ θ πρὸς τὸν ς ἡμιολίως, οὕτως ὁ ς πρὸς τὸν δ· καὶ ὃν ὁ ιϛ πρὸς τὸν ιβ, οὕτως ὁ ιβ πρὸς τὸν θ· καὶ τοῦτο ἐφεξῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν λόγων προκοπτόντων, εὐτάκτως. ὡς γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, οὕτως ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔσται. καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἀλλὰ ποικιλλόμενον ἀεὶ κατὰ προκοπήν· καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν συζυγιῶν, τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπό· καὶ ἅπαξ τὰ ἄκρα συνδεὶς τῷ μέσῳ ἐναλλὰξ, τετράγωνον πάντως ποιήσει καὶ τὸ πάντων τούτων γλαφυρώτατον, ἐξ ἀμφοτέρων συντιθεμένων τριγώνων γένεσις εὔτακτος γίνεται, σημαίνουσα ὡς τῆς τῶν πάντων ἀρχῆς ἀρχικωτέρα ἡ τούτων φύσις, α, καὶ β· καὶ β, καὶ δ· καὶ δ, καὶ ς· καὶ ς, καὶ θ· καὶ θ, καὶ ιβ· καὶ ιβ, καὶ ιϛ· καὶ ιϛ, καὶ κ· καὶ ἀεὶ οὕτως, οἱ τῶν πολυγώνων γενικώτεροι τρίγωνοι εὔτακτοι γίνονται. ἔτι δὲ καὶ πᾶς τετράγωνος προσλαβὼν τὴν ἑαυτοῦ πλευρὰν, ἑτερομήκης γίνεται, ἢ νὴ Δία ἀφαιρεθεὶς τὴν ἑαυτοῦ πλευράν· οὕτως τὸ ἕτερον καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον καὶ ἐπὶ τὸ ἔλαττον νοεῖται τοῦ αὐτοῦ, εἴπερ κατὰ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν συντελεῖται καθὰ καὶ τοῦ ἀνίσου τὰ δύο εἴδη, τό, τε μεῖζον καὶ ἔλαττον κατὰ πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν προσγινομένην τῷ ἴσῳ, τὴν γένεσιν λαμβάνει· ἱκανὸν καὶ τοῦτο τεκμήριον τοῦ ταυτότητος καὶ ἑτερότητος μετέχειν τὰ εἴδη ἀμφότερα· ἑτερότητος μὲν, ἀορίστως· ταυτότητος δὲ, ὡρισμένως· γενικῶς μὲν, μονάδι καὶ δυάδι· ὑποβεβηκότως δὲ, τετράγωνον μὲν ταυτότητος, διὰ τὸ μονάδι ὁμογενὲς εἶναι· ἄρτιον δὲ, ἑτερότητος, διὰ τὸ δυάδι. ὃ ἔτι ἐκδηλότερον, τετράγωνον μὲν διὰ τὸ, σύνθεσιν περισσοῦ εἶναι ταυτότητι συγγενοῦς ὑπάρχειν· ἑτερομήκη δὲ, διὰ τὸ ἀρτίου ἑτερότητι· καὶ γὰρ καὶ ὡς φιλάλληλα ἐν τοῖς δυσὶ στίχοις μεταδιδόασιν ἀλλήλοις τὰ δύο εἴδη ταῦτα παραμέρος, τὴν αὐτὴν διαφορὰν, εἰ μὴ καὶ τὸν αὐτὸν λόγον· καὶ ἀνάπαλιν τὸν αὐτὸν λόγον, εἰ μὴ καὶ τὴν αὐτὴν διαφοράν· ὁ γὰρ μεταξὺ τοῦ δ καὶ β διπλασίως, τοῦτο ἐπιμερείως μεταξὺ τοῦ ς καὶ τοῦ δ· καὶ πάλιν ὁ μεταξὺ τοῦ θ καὶ ς ἡμιολίως, τοῦτο

σθαι, ἐν δυσὶ παραλλήλοις ἐπὶ μῆκος στίχοις· μηκύνει ἰδίᾳ ἀρτίους ἀπὸ δυάδος, καὶ περισσοὺς ἀπὸ μονάδος, ὡς πρὸ μικροῦ, ἀλλὰ τῶν ἐξ αὐτῶν ἰσότητι συσπειρωθέντων αὐτοῖς ἀποτελεσθείσας, τετραγώνους μὲν ἀπὸ περισσῶν· ἑτερομήκεις δὲ, ἀπὸ ἀρτίων· ἐναπεικονίζονται γὰρ τῇ ἐκθέσει αὐτῶν θαυμάζομεν τὴν φιλαλληλίαν καὶ τὸ συλληπτικὸν ἀλλήλοις, εἰς τὸ ἀπογεννᾶν τὰ λοιπὰ καὶ ἐκπληροῦν, ἵνα εἰκότως ἐπινοῶμεν καὶ ἐν τῇ τῶν ὅλων φύσει ἐντεῦθεν ὡσπερ ἐκ τοιούτων, ὑπὸ τῆς κοσμικῆς προνοίας, συμπληροῦσθαι. ἔστωσαν οὖν οἱ δύο στίχοι τοιοῦτοι. ὁ μὲν, τῶν τετραγώνων ἀπὸ μονάδος, α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ, ρκα, ρμδ, ρξθ, ρϟς, σκε· ὁ δὲ τῶν ἑτερομηκῶν ἀπὸ δυάδος ἀρχόμενος ὑπ' αὐτοὺς οὕτως· β, ς, ιβ, κ, λ, μβ, οβ, ϟ, ρι, ρλβ, ρνς, ρπβ, σι, σμ. πρῶτον μὲν οὖν, πρῶτος πρὸς τὸν πυθμένα πολλαπλάσιος· δεύτερος δὲ, δευτέρου ἡμιόλιος· τρίτος δὲ, τρίτου ἐπίτριτος· τέταρτος δὲ, τετάρτου ἐπιτέταρτος· εἶτα ἐπιπέμπτος, καὶ ἐφεξῆς καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον ἀναλόγως. διαφοραὶ δὲ αὐτῶν προκόπτουσι κατὰ τὸν συνεχῆ ἀπὸ μονάδος ἀριθμόν· μονὰς μὲν, τῶν πρώτων· δυὰς δὲ, τῶν δευτέρων· τριὰς δὲ, τῶν τρίτων· καὶ ἀεὶ οὕτως. εἶτα δὲ, ἐναρξάμενος ὁ τῶν τετραγώνων δεύτερος συγκρίνηται, κατὰ διασμὸν, τῷ πρώτῳ τῶν ἑτερομηκῶν· καὶ ὁ τρίτος, β· καὶ ὁ τέταρτος, τρίτῳ· καὶ ἀκολούθως οἱ λοιποὶ, τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτους διατηρήσουσι τοῖς πρόσθεν· αἱ δὲ διαφοραὶ, οὐκ ἔτι ἀπὸ μονάδος, ἀλλ' ἀπὸ δυάδος ἄρξονται προχωρεῖν αἱ αὐταί· ἔτι κατὰ πρόβασιν δὲ, ἐν τῇ προτέρᾳ συγκρίσει, πρῶτος μὲν πρώτου πρῶτον πυθμένα πολλαπλάσιον ἔχει· δεύτερος δὲ, δευτέρου δεύτερον πυθμένα ἡμιόλιον· τρίτος δὲ, τρίτου τρίτον ἀπὸ πυθμένος ἐπίτριτον· καὶ παραπλησίως προκόπτουσιν οἱ ἑξῆς. ἔτι δὲ οἱ μὲν τετράγωνοι πρὸς ἑαυτοὺς διαφορὰς τοὺς περισσοὺς μόνον ἔχουσιν· οἱ δὲ ἑτερομήκεις τοὺς ἀρτίους. ἂν δὲ καὶ τοὺς πρῶτον ἑτερομήκη μέσον ἀμφοτέρων τῶν πρώτων τετραγώνων θῶμεν, τὸν δὲ δεύτερον, τῶν ἑξῆς· τὸν δὲ τρίτον, τῶν μετ' αὐτούς· τὸν τέταρτον δὲ, τῶν ἐφεξῆς τούτοις ὀφθήσονται, αὗται καὶ τὸ πρῶται αἱ χέσεις,

λέχθη, ὁ γινόμενος ὑπὸ ἀριθμοῦ τὸν μονάδι ἑαυτοῦ μείζονα πολυπλασιάσαντος· δὶς, ὁ ϛ', ὑπὸ τοῦ δὶς γ' · ὁ ιβ', ὑπὸ τοῦ τρὶς δ'. προμήκης δὲ ἐστιν, ὁ ὑπὸ δύο μὲν ἀριθμῶν διαφερόντων, ὁμοίως καὶ αὐτὸς γινόμενος, οὐ μὴν μονάδι γε, ἀλλὰ μείζονί τινι ἀριθμῷ· οἷον δὶς δ', τρὶς ϛ', τετράκις η'· καὶ οἱ παραπλήσιοι τῷ μήκει προπεπτωκότες τόπον τινὰ, καὶ ὑπερβεβηκότες τὴν τῆς μονάδος διαφοράς· οὐκοῦν ὅτι μὲν οἱ τετράγωνοι ὑπό τινων ἀριθμῶν ἰδίῳ μήκει μηκυνθέντων γίνονται, ταυτὸν ἔχοντες τὸ μῆκος τῷ πλάτει, ἰδιομήκεις ἂν κυρίως καὶ ταυτομήκεις λέγοιντο· οἷον, δὶς δύο, τρὶς τρία, τετράκις δ'· καὶ οἱ ἐφεξῆς. εἰ δὲ τοῦτο, μεθεκτικοὶ πάντως ταυτότητος καὶ ἰσότητος· διόπερ ὡρισμένοι τε καὶ περαίνοντες. τὸ γὰρ ἴσον καὶ τὸ ταυτὸν ἐν ἴσῳ καὶ ὡρισμένῳ τοιοῦτον· ὅτι δὲ καὶ οἱ ἑτερομήκεις ἀριθμοὶ οὐκ ἰδίῳ μήκει, ἀλλ' ἑτέρου μηκυνθέντες ἀποτελοῦνται, ἑτερομήκεις τε διὰ τοῦτο καὶ ἑτερότητος μεθεκτικοὶ, ἀπειρίας τε καὶ ἀοριστίας· ἡ δὲ ἀρχὰ διέστακται καὶ διανενέμηται, καὶ ἐναντία ἀλλήλοις φαίνεται τά τε τοῦ ἀριθμοῦ πάντα, καὶ τὰ ἐν κόσμῳ πρὸς ταῦτα ἀποτελεσθέντα· καὶ καλῶς οἱ παλαιοὶ φυσιολογεῖν ἀρχόμενοι τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς κοσμοποιΐας, ταύτῃ ποιοῦνται· Πλάτων μὲν, τῆς ταυτοῦ φύσεως καὶ τῆς θατέρου ὀνομάζων· καὶ πάλιν τῆς ἀμερίστου, καὶ ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἐχούσης οὐσίας, τῆς τε αὖ μεριστῆς γινομένης· Φιλόλαος δὲ, ἀναγκαῖον τὰ ἐόντα, εἶναι ἄπειρα ἢ περαίνοντα, ἢ περαίνοντα ἅμα καὶ ἄπειρα· ὅπερ μᾶλλον συγκατατίθεται εἶναι, ἐκ περαινόντων ἅμα καὶ ἀπείρων συνεστάναι τὸν κόσμον, κατ' εἰκόνα δηλονότι τοῦ ἀριθμοῦ. καὶ γὰρ οὗτος σύμπας, ἐκ μονάδος καὶ δυάδος σύγκειται, ἀρτίου τε καὶ περιττοῦ· ἃ δὴ ἰσότητός τε καὶ ἀνισότητος ἐμφαίνει, καὶ ταυτότητός τε καὶ ἑτερότητος περαίνοντός τε καὶ ἀπείρου, ὡρισμένου τε καὶ ἀορίστου. ἵνα δὲ καὶ ἐναργῶς πεισθῶμεν περὶ τῶν λεγομένων, ὅτι ἄρα ἐκ μαχομένων καὶ ἐναντίων συνέστηκε τὰ ὄντα, καὶ εἰκότως ἁρμονίαν ὑπεδέξατο (ἁρμονία δὲ πάντως ἐξ ἐναντίων γίνεται· ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων σύμφρασις.) ἐκθώμε-

ἀμέλει ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ε πλευρᾶς, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἕκτης. ὅσῳ δ' ἂν αὐξήσειν αὐξήσεων τούτων ἑκάτερον, εἰς τὸ αὐτὸ σύμπτωμα ἀεὶ τελευτήσει πάντως· ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ς, εἰς αὐτὸ τὸ ς· ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ε, εἰς αὐτὸ τὸ ε· οἷον, πεντάκις ε, εἰς τὸ ε τελευτήσει· καὶ τοῦτο πεντάκις, εἰ δέοι πάλιν πεντάκις ε· καὶ μέχρις ἀπείρου ἑτέρα τις τελευτὴ οὐχ εὑρεθήσεται, πλὴν εἰ μὴ ἡ ε. καὶ ἀπὸ τοῦ ς ἐν αὐτῷ πρόσω μὴ ς, καὶ ἄλλη οὐδεμία· ὥστε ἡ μονὰς, δυνάμει σφαιρική ἐστι, καὶ ἀποκαταστατική. τὸ γὰρ αὐτὸ πάσχει τοῦτο ὡς εἰκὸς πάθος, τὸ παρὰ τὰς σφαίρας καὶ τοὺς κύκλους. ἐκείνων γὰρ ἑκάτερον ὅθεν ἄρχεται, ἐκεῖ καὶ τελευτᾷ περικυκλούμενον καὶ περιφερόμενον· ὡς καὶ οἱ λεχθέντες οὗτοι ἀριθμοὶ μονώτατοι τῶν ἄλλων τῶν ἰσάκις ἴσων καὶ εἰς τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ὅθεν ἤρξαντο καταντῶσι παρὰ πάσας τὰς αὐξήσεις· ἄλλ' οἱ μὲν ἐπιπέδως δυσὶ διαστήμασι προκόψωσι, κυκλικοὶ λέγονται· ὡς ὁ α, κε, λς, ἐκ τοῦ ἅπαξ ἓν καὶ τοῦ πεντάκις πέντε, καὶ τοῦ ἑξάκις ἕξ· ἐὰν δὲ τρία διαστήματα ἔχωσιν, ἢ ἐπὶ πλεῖον τοῦτο πολλαπλασιασθῶσι, σφαιρικοὶ στερεοὶ λέγονται· ὡς ὁ α, ρκε, σις· ἢ ἄλλως, α, χκε, ᾳ, σις. Περὶ μὲν στερεῶν ἀριθμῶν, ἱκανὰ ἐν τῷ παρόντι καὶ ταῦτα. ἐπεὶ δὲ ἀρχὰς τῶν ὅλων οἵ τε φυσικοὶ καὶ οἱ ἐκ τῶν μαθημάτων ὁρμώμενοι τὸ ταὐτὸν καὶ τὸ ἕτερον λέγουσιν, ἀπεδείχθη δὲ τὸ ταὐτὸν μὲν ὑπάρχουσα ἡ μονὰς, καὶ οἱ κατ' εἰδοποίησιν αὐτοῦ πάντες· πολὺ δὲ μᾶλλον, οἱ ἐκ τούτων συγκρινομένων συνιστάμενοι τετράγωνοι· ὡς ἂν δὴ ἰσότητος ἐν ταῖς πλευραῖς μετέχοντες· ἕτερον δὲ, δυάς τε καὶ ὁ ὑπὸ ταύτης εἰδοποιούμενος πᾶς ἄρτιος· μάλιστα δὲ οἱ ὑπὸ τούτων συστρεφομένων συνιστάμενοι ἑτερομήκεις, διὰ τὸ πρώτης ἀνισότητος καὶ ἑτερότητος ἐν τῇ τῶν πλευρῶν διαφορᾷ μετέχειν, ἔτι τοῦτο ἀποδεικτέον ἀναγκαιότατα, πῶς ἐν ἀμφοτέροις τούτοις, ὡς ἐν ἀρχαῖς ἢ σπέρμασι, δυνάμει πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἰδιώματα προϋπόκειται, εἰδῶν τε αὐτοῦ καὶ ὑποδιαιρέσεων, σχέσεών τε πασῶν καὶ πολυγώνων καὶ τῶν παραπλησίων· πρότερον δὲ διασαφητέον ἡμῖν, ἢ διαφέρει προμήκης ἀριθμὸς ἑτερομήκους· ἑτερομήκης μὲν γάρ ἐστιν, ὡς προελέχθη,

μὲν μετέχειν τῆς δὲ ἀρτίου, τῆς θατέρου· καὶ γὰρ δὴ, καὶ κατὰ θεωρίαν ἑκατέρου ἀπλοῦνται φύσει ἀλλ᾽ οὐχ ἡμῶν θεμένων· τῇ μὲν, τῆς ἀπὸ μονάδος περισσοῦ ἐπ᾽ ἄπειρον, ἡ τετραγώνου φύσις· τῇ δὲ, τῆς ἀπὸ δυάδος ἀρτίου ἐπ᾽ ἄπειρον, ἡ τῆς ἑτερομήκους. πᾶσα ἄρα ἀνάγκη τὸν μὲν τετράγωνον οἴεσθαι πάλιν τῆς αὐτοῦ φύσεως μετέχειν· τὸν γὰρ αὐτὸν λόγον καὶ ὅμοιον, καὶ ἀπαράλλακτον, καὶ ἐν ἰσότητι κείμενον αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἀποδεικνύουσι πρὸς ἑαυτάς· τὸν δὲ ἑτερομήκη, τῆς θατέρου· ὃν γὰρ μονὰς πρὸς δυάδα τρόπον παρήλλακται, μονάδι μόνῃ διαφέρουσα, τοῦτον καὶ παντὸς ἑτερομήκους αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας διαλλάσσουσιν, ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, μονάδι μόνον διαφέρουσα. δι᾽ ἐκκειμένου τοῦ ἀπὸ μονάδος συνεχοῦς ἑξῆς ἀριθμοῦ, ἐκλεξάμενος ἰδίᾳ μὲν, τοὺς περισσοὺς τάσσω ἐν ἑνὶ στίχῳ· ἰδίᾳ δὲ, τοὺς ἀρτίους ἐν ἑτέρῳ, καὶ γίνονταί μοι δύο στίχοι, α, γ, ε, ζ, θ, ια, ιγ, ιε, ιζ, ιθ, κα, κγ, κε, κζ. β, δ, ς, η, ι, ιβ, ιδ, ις, ιη, κ, κβ, κς, κη.

Ἄρχει μὲν οὖν τοῦ τῶν περισσῶν στίχου ἡ μονὰς, ὁμογενής τε οὖσα καὶ τὴν τοῦ αὐτοῦ φύσιν ἔχουσα· διὸ οὔτε ἐάν τε ἑαυτὴν πολυπλασιάσῃ ἐπιπέδως ἢ στερεῶς, ἐκτρέπεται· οὔτε ἄλλον ὁντιναοῦν, ἐξίστησι τοῦ ἐξ ἀρχῆς, ἀλλὰ τηρεῖ αὐτὸν ἐν ταὐτῷ· τὸ δὲ τοιοῦτο περὶ ἄλλον ἀριθμὸν εὑρεῖν ἀδύνατον. τοῦ δ᾽ ἄλλου στίχου, ἄρχει ἡ δυὰς ὁμογενὴς αὐτῷ οὖσα καὶ ἑτερότητος καταρχική· εἴτε γὰρ ἑαυτὸν, εἴτε ἄλλον πολυπλασιάσειε, ἐξίστησιν τριάδι, δὶς β, δὶς γ. ὅταν δὲ ἢ ὀκτάκις, ἢ δὶς, ἢ τρὶς, τὰ τοιαῦτα στερεὰ σχήματα, πλινθίδες καλοῦνται ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις. ἐὰν δὲ καὶ μείζονα τὰ ὕψη τῶν τετραγώνων προσγένηται, δοκίδες οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται δι᾽ τρὶς τρεῖς, ἑπτάκις, ἢ ὀκτάκις, ἢ ἐννάκις, ἢ ὁσακισοῦν, μόνον ὑπερβαλλόντως. ἔστι δὲ δοκὶς, ἀριθμὸς ἰσάκις ἴσος μειζονάκις. οἱ δέ γε σφηνίσκοι, οἱ τῶν ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις· καὶ οἱ κύβοι ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις· αὐτῶν δὲ τῶν κύβων ὅσοι πρὸς τοῖς ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις εἶναι καὶ τοῦτ᾽ ἔχουσι ἐκ τοῦ ἀεὶ καταλήγειν κατὰ πᾶσαν πολυπλασιασμὸν εἰς τὸν αὐτὸν ἀφ᾽ οὗπερ ἤρξαντο, σφαιρικοὶ καλοῦνται· οἱ δ᾽ αὐτοὶ καὶ ἀποκαταστατικοί ὥσπερ

βωμοὶ, μάλιστα δὲ ἰωνικοὶ οὔτε τὸ πλάτος τῷ βάθει, οὔτε συναμφότερα τῷ μήκει ἴσα ἔχουσιν, οὔτε τὴν βάσιν τῇ κορυφῇ· ἀλλὰ πάντη εἰσὶν ἐξηλλαγμένοι ταῖς διαστάσεσιν. ὡς οὖν ἀκρότητες τοῦ β κύβου τε καὶ σκαληνοῦ· τοῦ μὲν, κατ᾽ ἰσότητα διεστῶτος, τοῦ δὲ, κατ᾽ ἀνισότητα πάντη, μέσοι εἰσὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ λεγόμενοι παραλληλεπίπεδοι· ὧν καὶ τὰ ἐπίπεδα, ἑτερομήκεις ὑπάρχουσιν ἀριθμοί· ὥσπερ καὶ τῶν κύβων αὐτῶν τετράγωνοι, ἀριθμοὶ ἦσαν τὰ ἐπίπεδα, ὡς ἐδείχθη.

ΠΕΡῚ ἙΤΕΡΟΜΉΚΟΥΣ.

Πάλιν οὖν ἄνωθεν ἑτερομήκης ἀριθμὸς λέγεται, οὗ ἐπιπέδως σχηματογραφηθέντος, τετράπλευρος μὲν καὶ τετραγώνιος γίνεται ἡ καταγραφή· οὐ μὴν ἴσαι ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ, οὐδὲ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἴσον, ἀλλὰ παρὰ μονάδα· (οἷον ὁ β, ὁ ς, ὁ ιβ, ὁ κ, ὁ λ, ὁ μβ, καὶ οἱ ἑξῆς· ἂν γὰρ αὐτοὺς ἐπιπέδως διαγράφῃς, πάντως οὕτως ποιήσει· ἅπαξ δύο, δύο· δὶς τρία, ς· τρὶς δ, ιβ· καὶ τοὺς ἑξῆς ἀναλόγως· τετράκις, ς, ἑξάκις ἑπτὰ, ἑπτάκις η· καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον)· μόνον, ἵνα μονάδι μείζων ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς λοιπῆς ᾖ, ἄλλῳ δὲ μηδενὶ ἀριθμῷ. ἐὰν δὲ ἄλλως παρὰ τὴν μονάδα διαφέρωσιν ἀλλήλων αἱ πλευραὶ, (δι᾽ δυάδι, τριάδι, τετράδι· ἢ ἐφεξῆς, ὡς τὰ δὶς τέσσαρα, ἢ τρὶς ς, ἢ τρὶς η· ἢ ὅπως ποτὲ οὖν ἑτέρως·) οὐκέτι κυρίως ὁ τοιοῦτος ἑτερομήκης κληθήσεται, ἀλλὰ προμήκης· ἕτερον γὰρ καὶ ἑτερότητα οἱ παλαιοὶ οἵ τε περὶ Πυθαγόραν καὶ τοὺς ἐκείνου διαδόχους πυθμενικῶς ἐν τῇ δυάδι ἐθεώρουν· ταυτὸν δὲ καὶ ταυτότητα ἐν τῇ μονάδι μόνον ἀλλήλων διαφέρουσαι· ὥς τε καὶ τὸ ἕτερον σπερματικῶς μονάδι, ἕτερόν ἐστι, καὶ οὐκ ἄλλῳ ἀριθμῷ· διόπερ καὶ συνήθως ἐπὶ δυοῖν, ἀλλ᾽ οὐκ ἐπὶ πλειόνων τὸ ἕτερον λέγεται παρὰ τοῖς ὀρθῶς διαλεγομένοις· ἀλλὰ μὴν καὶ μονάδι μὲν εἰδοποιεῖσθαι ἀπεδείχθη ὁ περισσὸς πᾶς ἀριθμός· δυάδι δὲ, ὁ ἄρτιος πᾶς· ὅθεν εἰκότως τὸν μὲν περισσὸν τῆς ταυτοῦ φύσεως ἐροῦμεν

τετραγώνων, ἀφ' ὧν ἐκεῖνοι ἕκαστον, ἀφ' ἑκάστου, οἱ μὲν τοῦ η', δυάδων, ὅσων καὶ αἱ τοῦ δ'· αἱ δὲ τοῦ κζ', τριάδων, ὅσων καὶ τοῦ θ'· αἱ δὲ τοῦ ξδ', τετράδων, ὅσων καὶ αἱ τοῦ ις'· καὶ τοῦτο ἐφεξῆς· ὥστε καὶ ἡ τῷ δυνάμει κύβου μονάδος πλευρά, μονὰς ἔσται πανταχόθεν, ὅση καὶ ἡ τῷ δυνάμει τετραγώνου μονάδος. καθόλου δὲ ἕκαστος τετράγωνος, ἐν μὲν ἐπιπέδῳ ἐστί, γωνίας δὲ ἔχει δ', καὶ πλευρὰς τέσσαρας· ἕκαστος δὲ κύβος ηὐξημένος ὤν, ὁ ἐξ ἑκάστου τετραγώνου τῇ ἰδίᾳ πλευρᾷ πολυπλασιασθείς, ἐπίπεδα μὲν ἕξει πάντως, ὧν ἕκαστον ἴσον τῷ προγόνῳ αὐτοῦ τετραγώνῳ· πλευρὰς δὲ ιβ', ὧν ἑκάστη ἴση καὶ μονάδων γε τοσούτων ὅση τοῦ προγόνου τετραγώνου πλευρά· γωνίας δὲ ὀκτὼ στερεάς, ὧν ἑκάστη περιέχεται ὑπὸ τριῶν πλευρῶν, οἷα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ἐν τῷ προγόνῳ τετραγώνῳ. ἐπειδὴ οὖν πάντῃ ἰσόπλευρον ἐπὶ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος σχῆμα στερεὸν ὑπάρχει ὁ κύβος, καὶ ἐπὶ τὰς λεγομένας ἓξ περιστάσεις ἰσοδιάστατος, ἀκόλουθον ἄρα ἐστίν, ἀντικεῖσθαι αὐτῷ, τὸ μηδαμῶς ἴσας ἔχον τὰς διαστάσεις ἀλλήλαις, ἀλλ' ἄνισον τὴν τοῦ βάθους τῇ τοῦ πλάτους, καὶ ἑκατέραν τούτων τὴν τοῦ μήκους· οἷον, δὶς ε', τετράκις ε'· ἢ δὶς δ', τετράκις δ', ὀκτάκις δ'· ἢ τρὶς γ', πεντάκις γ', δωδεκάκις γ'· ἢ κατά τινα ἄλλην ἀνισότητα τοιαύτην. τὰ δὲ τοιαῦτα στερεὰ σχήματα, λέγεται σκαληνὰ ἁπλῶς· ὧν πάντῃ τὰ διαστήματα ἄνισα ἀλλήλοις ἐστί. τινὲς δὲ αὐτὰ πολυωνύμως σφηνίσκους καλοῦσι· καὶ γὰρ καὶ οἱ σφῆνες, ἀνισόπλευροι πανταχῇ, τεκτονικοί τε καὶ οἱ οἰκοδομικοί, καὶ χαλκευτικοί, καὶ οἱ τῶν ἄλλων τεχνῶν πλάσσονται, ἀπὸ ὀξυτέρου ἄκρου διαδύνειν ἀρχόμενοι, καὶ αἰεὶ μᾶλλον πλατυνόμενοι ἀνομοίως κατὰ πάντα τὰ διαστήματα. τινὲς δὲ τοὺς αὐτοὺς σφηκίσκους καλοῦσιν· τοιοῦτος γὰρ καὶ ὁ τῶν σφηκῶν μάλιστα ὄγκος, ἀποσφιγγόμενοι κατὰ μέσον, καὶ τὴν λεχθεῖσαν ὁμοιότητα ἐμφαίνων, παρὰ τοῦτο εἰκὸς καὶ τὸ σφήκωμα ὠνομάσθαι· ἔνθα γὰρ ἂν ἀποσφίγξῃ, τὴν τοῦ σφηκὸς εἰκόνα μιμεῖται. ἕτεροι δὲ τοὺς αὐτοὺς βωμίσκους προσαγορεύουσιν, ἀπ' οἰκείας εἰκόνος· οἱ γοῦν παλαιότεροι βωμοί,

ἔσονται. ἵνα δὲ μὴ ἀνήκοοι ὦμεν κολούρων, καὶ δικολούρων, καὶ τρικολούρων πυραμίδων, ὧν τοῖς ὀνόμασιν ἐντευξόμεθα ἐν συγγράμμασι μάλιστα τοῖς θεωρητικοῖς, ἰστέον ὅτι ἐὰν πυραμὶς ἀφ' ἡστινοσοῦν βάσεως, τουτέστι, ἐν τινὶ οὖν πολύγωνον ἔχουσα βάσιν, εἴτε τρίγωνον, εἴτε τετράγωνον, εἴτε πεντάγωνον, εἴτε τὸν ἑξῆς τινα τῶν ὁμογενῶν πολυγώνων κατὰ σωρείαν αὐξηθεῖσα μὴ ἐπὶ μονάδα μειουμένη, κόλουρος ἁπλῶς λέγεται, ἐστερημένη τῆς φυσικῆς καὶ πᾶσιν ἐπιβαλούσης κορυφώσεως. οὐ γὰρ εἰς τὸν δυνάμει πολύγωνον τὴν μονάδα τελευτᾷ αὕτη, ὡς εἰς ἐν τῷ σημεῖον, ἀλλ' εἰς ἕτερον ἐνεργείᾳ, καὶ οὐκέτι μονὰς κορυφή· ἀλλ' ἐπίπεδον αὐτῇ τὸ πέρας γίνεται ἰσογώνιον τῇ βάσει. ἐὰν δὲ πρὸς τῷ μὴ εἰς μονάδα τελευτᾶν, ἔτι δὴ μὴ εἰς τὸν παρὰ τὴν μονάδα ἐνεργείᾳ πρῶτον τελευτήσῃ, δικόλουρος λέγεται ἡ τοιαύτη· ἐὰν δὲ καὶ ἔτι μὴ ἔχῃ τὸν ἐνεργείᾳ δεύτερον πολύγωνον ἐπὶ τῷ συμπεράσματι, ἀλλὰ μόνον τὸν ὑπ' αὐτὸν, τρικόλουρος κεκλήσεται· καὶ τετρακόλουρός γε, ἂν καὶ τὸν μετ' ἐκεῖνον μὴ ἔχῃ. καὶ πεντακόλουρος κατὰ τὸ ἑξῆς· καὶ ἀεὶ μέχρις οὗ βούλει παρεκτείνειν τὸ ὄνομα. καὶ ἡ μὲν τῶν ἰσοπλεύρων στερεῶν ἀριθμῶν πυραμίδων γένεσις καὶ πρόοδος καὶ ἐπαύξησις καὶ φύσις τοιαύτη, σπέρμα καὶ ῥίζαν ἔχουσα τοὺς πολυγώνους αὐτούς, καὶ τὴν ἐκείνων σύνταξιν ἐπὶ σωρείαν. ἑτέρα δέ τις στερεῶν συνταξία ἡ τῶν λεγομένων κύβων, δοκίδων, πλινθίδων, σφηνίσκων, σφαιρικῶν, παραλληλεπιπέδων τὴν τῆς προβάσεως τάξιν, ἔχουσα τοιαύτην τινά· οἱ προειρημένοι τετράγωνοι, α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, καὶ οἱ ἑξῆς διχῇ ὄντες διαστατοί· καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ σχηματογραφίᾳ, μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχοντες, ἔτι καὶ τρίτον προσλήψονται διάστημα καὶ ἔσονται στερεοὶ καὶ τριχῇ διαστατοί, ἐὰν τῇ ἰδίᾳ πλευρᾷ, ἕκαστος πολλαπλασιασθῇ· ὁ μὲν δ, δὶς β ὢν πάλιν δὶς γινόμενος, ἵνα ὀγδοὰς ἀποτελεσθῇ· ὁ δὲ θ, τρὶς γ ὢν πάλιν τριάδι ἐπ' ἄλλο διάστημα αὐξηθῇ, καὶ γίνεται κζ· καὶ οἱ ἑξῆς παραπλησίως μέχρι παντός· τοσούτων δὲ καὶ ἐνθάδε μονάδων αἱ πλευραὶ ἔσονται, ὅσων περ ἦσαν αἱ τῶν τετρα-

πρῶτος μὲν, ὁ α· εἶτα, ὁ αγ, ὁ αγς· εἶτα πρὸς τούτοις, ὁ ι· καὶ ἐφεξῆς σὺν τοῖς πρόσθεν, ὁ ιε· καὶ ἔτι τούτοις, ὁ κα· καὶ ἑξῆς, ὁ κη· καὶ ἐπ' ἄπειρον. δῆλον δὲ, ὅτι καὶ ὁ μείζων τῶν ἀριθμῶν κατώτατος νοεῖται· αὐτὸς γὰρ βάσις διέστηκεν· ὁ δὲ εὐθὺς μετ' αὐτὸν, ὑπὲρ αὐτόν· καὶ ὁ μετ' ἐκεῖνον, ὑπὲρ ἐκεῖνον· ἕως ἂν ἡ α ἐπὶ τῇ κορυφῇ φανῇ, καὶ ὡσανεὶ εἰς σημεῖον ἀπομειουρίσῃ τὴν πλείωσιν τῆς πυραμίδος. αἱ δὲ ἑξῆς πυραμίδες εἰσὶν, αἱ ἀπὸ τετραγώνου βάσεως ὁμοιοσχημόνως ἀνιστάμεναι ἐφ' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον· αὗται δὲ τῷ αὐτῷ τρόπῳ πλάσσονται ταῖς προλεχθείσαις τριγωνικαῖς· τῶν γὰρ ἀπὸ μονάδος ἐκτάκτους τετραγώνους στιχηδὸν ἐκθέμενος, α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ· καὶ τῶν ἑξῆς πάλιν συνθετῶν ἐπιτίθημι ἀλλήλοις κατὰ βάθος αὐτῶν, τὸ α, ἐπάνω τοῦ δ, καὶ γίνεται πυραμὶς ἡ ε, ἐνεργείᾳ πρώτη ἀπὸ τετραγώνου βάσεως, δυνάμει γὰρ α· καὶ ἐνταῦθα ἡ μονάς· πάλιν δ' αὐτὴν ταύτην ὡς ἔχει τὴν πυραμίδα τὴν ἐκ πέντε μονάδων, ἐπιτίθημι ὅλην τῷ θ, τετραγώνῳ· καὶ συνίσταταί μοι, ἡ ιδ πυραμὶς, ἀπὸ τετραγώνου βάσεως, πλευρὰν ἔχουσα πάντοθι τριάδος τῆς προτέρας, δυάδα ἐχούσης τῆς ε· τῆς δὲ δυνάμει πρώτης, μονάδα. δεῖ γὰρ καὶ ἐνθάδε τούτων ἑκάστην πλευρὰν ἥτις ποτὲ οὖσαν πυραμίδος μονάδων εἶναι, ὅσοι περ εἰσὶ τῶν ἀριθμοὺς οἱ εἰς σύστασιν αὐτῆς συμπεριληφθέντες πολύγωνοι. πάλιν δ', τὴν ιδ πυραμίδα συνόλην βάσιν ἔχουσα τὸν θ τετράγωνον, ἐπιτίθημι τῷ ις τετραγώνῳ, καὶ ἀποτελεῖταί μοι, ἡ λ πυραμίς· τρίτη κατ' ἐνέργειαν τῶν ἀπὸ τετραγώνου βάσεως οὖσα· τῇ δ' αὐτῇ τάξει καὶ ἀγωγῇ καὶ ἀπὸ πενταγώνου βάσεως καὶ ἀπὸ ἑξαγώνου, καὶ ἑπταγώνου βάσεως, καὶ ἐπὶ πλεῖον ἀεὶ προχωροῦντες, πυραμίδας συστησόμεθα, τῶν ἀναλογούντων ἑκάστους πολυγώνους ἐπισωρευόντων ἀλλήλοις· ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι ὡς ἀπὸ ἐλαχίστου, καὶ προχωρούντων μέχρις ἀπείρου καθ' ἑκάστην. καὶ ἐκ τούτου δῆλον γίνεται, ὅτι στοιχειωδέστερα τὰ τρίγωνα· πᾶσαι γὰρ ἁπλῶς αἱ δεικνύμεναι καὶ φαινόμεναι πυραμίδες, ἀπὸ τῶν καθ' ἑκάστην πολυγώνων βάσεων, τριγώνοις μέχρι κορυφῆς περι-

δ' ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς στερεοῖς σχήμασιν, ἀπὸ τριγώνου ἰσοπλεύρου, ἐάν τις εὐθείας ἀνοίσῃ τρεῖς ἀπὸ τῶν γωνιῶν μήκει ἴσας ταῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς καθ' ὕψος συννευούσας, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, πυραμὶς ἂν ἀποτελεσθείη ὑπὸ τεσσάρων περιεχομένη τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἴσων ἀλλήλοις· ἑνὸς μὲν, τοῦ ἐξ ἀρχῆς τριγώνου· τριῶν δὲ, τῶν περιγραφέντων, ὑπὸ τῶν λεχθεισῶν τριῶν εὐθειῶν. καὶ πάλιν ἀπὸ τετραγώνου ἐπιπέδου ἐάν τις τέσσαρας εὐθείας λογίσηται τῷ μήκει ἴσας ταῖς τοῦ τετραγώνου πλευραῖς, ἑκάστην ἑκάστῃ· πάλιν κατὰ τὸ ὕψος συννευούσας εἰς ἓν, καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, πυραμὶς ἂν ἀποτελεσθείη ἀπὸ τετραγώνου βάσεως τετραγωνικῶς μειουριζομένη· περιεχομένη δὲ, ὑπὸ τεσσάρων μὲν τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἑνὸς δὲ τετραγώνου τοῦ ἐξ ἀρχῆς· καὶ ἀπὸ πενταγώνου δὲ καὶ ἑξαγώνου καὶ ἑπταγώνου, μέχρις οὗ βούλεταί τις προχωρεῖν, τῷ αὐτῷ τρόπῳ εὐθεῖαι ἰσάριθμοι ταῖς γωνίαις ἀπ' αὐτῶν τῶν γωνιῶν ἀνεγειρόμεναι· καὶ εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ συννεύουσαι σημεῖον, πυραμίδα ἀποκορυφοῦσιν ὀνομαζομένην ἀπὸ πενταγώνου βάσεως ἢ ἑξαγώνου, ἢ ἑπταγώνου, ἢ ἀνάλογον· οὕτω δὲ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἀπὸ μὲν μονάδος ὡς ἀπὸ σημείου πᾶς γραμμικὸς ηὐξήθη ἀριθμὸς οἷον, α, β, γ, δ, ε· καὶ οἱ ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον. ἀπ' αὐτῶν δὲ τούτων γραμμικῶν ὄντων, καὶ ἐφ' ἓν διαστατῶν πῶς συντεθέντων καὶ οὐχ ὡς ἔτυχεν, οἱ πολύγωνοι καὶ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πλάσσονται· τρίγωνοι μὲν, παρὰ μηδένα συντεθέντων τῶν γνωμόνων· τετράγωνοι δὲ, παρὰ ἕνα· πεντάγωνοι δὲ, παρὰ δύο· καὶ ἀεὶ οὕτως. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ αὐτῶν τούτων τῶν ἐπιπέδων πολυγώνων ἀριθμῶν ἐπισωρευομένων ἀλλήλοις καὶ ὡσανεὶ ἐποικοδομουμένων, αἱ ὁμογενεῖς ἑκάστῳ πυραμίδες γεννῶνται· ἡ μὲν, ἀπὸ τριγώνου βάσεως, ἀπ' αὐτῶν τῶν τριγώνων· ἡ δὲ, ἀπὸ τετραγώνου βάσεως, ἀπ' αὐτῶν τῶν τετραγώνων· ἡ δὲ ἀπὸ πενταγώνου, ἀπὸ πενταγώνων· καὶ ἡ ἀπὸ ἑξαγώνου, ἀπὸ τῶν ἑξαγώνων· καὶ ἐπὶ δ' ὅλου· εἰσὶν οὖν αἱ μὲν ἀπὸ τριγώνου βάσεως εὔτακτα αὗται, α, δ, ι, κ, λε, νϛ, πδ· καὶ ἐφεξῆς· ὧν ἡ γένεσις, αὐτοὶ οἱ τρίγωνοι ἀλλήλοις ἐπισωρευόμενοι·

πρῶτος

παραλλήλοις στίχοις οὕτω ποιήσασθαι. καθολικῶς γὰρ εὑρήσεις
τοὺς μὲν τετραγώνους τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς σύστημα ὄντας, ὁμοταγῶν
τριγώνων· καὶ ἔτι τὸν ὑποκειμένων ἐκείνοις ὁμογενῶν· οἷον τὸν
δ, τοῦ γ, καὶ τοῦ α· τὸν θ, τοῦ ς καὶ γ· τὸν ις, τοῦ ι καὶ τοῦ ς· τὸν
κε, τοῦ ιε καὶ ι· τὸν δὲ λς, τοῦ κα καὶ ιε· μέχρις ἀεὶ οὕτως. τοὺς δὲ
πενταγώνους τὸ ὑπὲρ αὐτοὺς ὁμοταγῶν τετραγώνων σύστημα,
ὄντας, καὶ προσέτι τὸν προτεταγμένων τριγώνων, ὅσοι εἰσὶ μονάδι ἔ-
λαττον ὁμοταγεῖς, οἷον ὁ μὲν ε, τοῦ δ καὶ α· ὁ δὲ ιβ, τοῦ θ καὶ γ· ὁ δὲ κβ,
τοῦ ις καὶ ς· ὁ δὲ λε, τοῦ κε καὶ ι· καὶ μέχρις οὗ βούλει. πάλιν δὲ οἱ ἑξά-
γωνοι, τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς ὁμοταγῶν πενταγώνων καὶ τῶν προεκθέντων τρι-
γώνων ὁμοίως, οἷον ὁ ς, τοῦ ε καὶ α· ὁ ιε, τοῦ ιβ καὶ γ· ὁ δὲ κη, τοῦ κβ καὶ
ς· ὁ δὲ με, τοῦ λε καὶ ι· καὶ μέχρις οὗ βούλει. τῶν δὲ ἑπταγώνων, ὁ αὐ-
τὸς τρόπος· ὁ μὲν γὰρ ζ, σύστημά ἐστι τοῦ ς καὶ α· ὁ δὲ ιη, τοῦ ιε καὶ
γ· ὁ δὲ λδ, τοῦ κη καὶ ς· καὶ οἱ ἑξῆς ἀκολούθως· ἵνα ἕκαστος πο-
λύγωνος σύστημα ᾖ τοῦ τε ὑπὲρ αὐτὸν ὁμοταγοῦς μονάδι ἐλάτ-
τονος ὁμογωνίου καὶ τοῦ ἀνωτάτου τριγώνου τοῦ μονάδι ἐλάττο-
νος ὁμοταγοῦς παρ' ἐν κειμένου. εἰκότως ἄρα στοιχεῖον πολυγώ-
νων τὸ τρίγωνον, καὶ ἐν γραμμαῖς καὶ ἐν ἀριθμοῖς· ὅ γὰρ καὶ κατὰ
βάθος καὶ πλάτος ἐν τοῖς διαγράμμασιν εὑρίσκονται οἱ συνε-
χεῖς αἰεὶ ἀριθμοὶ κατὰ τοὺς στίχους αὐτοὺς ἔχοντες διαφορὰς τοὺς
ὑποτάκτους τριγώνους. ἐντεῦθεν ἤδη ῥᾴδιον συνιδεῖν μετὰ τὸ ὁ στε-
ρεὸς ἀριθμὸς καὶ πῶς ἰσόπλευρος ὁ τοιοῦτος προκόπτει· ὁ γὰρ
πρὸς τοῖς δυσὶ διαστήμασι τοῖς ἐν τῇ ἐπιπέδῳ σχηματογραφίᾳ
θεωρουμένοις, ἤδη μήκει καὶ τῷ πλάτει, τρίτον διάστημα προ-
σειληφὼς, ὅ τινες μὲν βάθος· τινὲς δὲ, πάχος καλοῦσιν· ἔνιοι δὲ,
ὕψος· ἐκεῖνος ἂν εἴη ἀριθμὸς, ὁ τριχῇ διαστατὸς καὶ ἔχων ἐν ἑαυ-
τῷ μῆκος, βάθος, πλάτος. πρώτιστα δὲ οὗτος φαντάζεται
ἐν ταῖς λεγομέναις πυραμίσιν. αὗται δὲ γίνονται ἐκ πλατυτέ-
ρων βάσεων, μειουμεναι εἰς ὀξεῖαν κορυφὴν, πρῶτον μὲν, κα-
τὰ τριγωνισμὸν ἀπὸ τριγώνου βάσεως· δεύτερον δὲ, κατὰ τετρα-
γωνισμὸν ἀπὸ τετραγώνου βάσεως· εἶτα ἀνάλογον ἀπὸ ἑξαγώνου
καὶ ἑπταγώνου, καὶ ὀκταγώνου· καὶ ἀεὶ ἐπ' ἄπειρον· καθάπερ ἀμέλει

λόγος. ἵνα δὲ ἐπὶ πάντων παρατηρῶμεν τοῦτο καθολικὸν σύμφωνον ᾖ, ἑκάστου πολυγώνου τοὺς γνώμονας διαφέρειν ἀλλήλοις δυάδι ἐλαττόνως ἢ κατὰ τὴν ἐν τῷ ὀνόματι ποσότητα τῶν γωνιῶν· τουτέστι, μονάδι μὲν, τὸ τρίγωνον· δυάδι δὲ, τὸ τετράγωνον· τριάδι δὲ, τὸ πεντάγωνον· τετράδι δὲ, τὸ ἑξάγωνον· καὶ πεντάδι, τὸ ἑπτάγωνον· καὶ ἀεὶ κατὰ παραύξησιν οὕτως. καὶ περὶ μὲν τοῦ τῶν πολυγώνων φύσεως τῶν ἐπιπέδων, ἱκανὰ ταῦτα ὡς εἰς πρώτην εἰσαγωγήν· ὅτι δὲ συμφωνοτάτη διδασκαλία ἡ περὶ αὐτοῦ τῇ γραμμικῇ καὶ οὐκ ἀπᾴδουσα, δῆλον ἂν εἴη οὐ μόνον ἐκ τοῦ σχηματογραφίας τοῦ καθέκαστον, ἀλλὰ κἀκεῖθεν· πᾶν τετράγωνον σχῆμα διαγωνίως διαιρεθὲν, εἰς δύο τρίγωνα λύεται, καὶ πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς εἰς β τριγώνους συνεχεῖς λύεται· καὶ ἐξ ἄρα δύο τριγώνων συνεχῶν συνέστηκεν· οἷον τρίγωνοι μὲν εἰσιν, α, γ, ϛ, ι, ιε, κα, κη, λϛ, με, νε, καὶ οἱ ἑξῆς· τετράγωνοι δὲ, α, δ, θ, ιϛ, κε, λϛ, μθ, ξδ, πα, ρ· δύο δὴ οὓς ἂν θέλῃς τριγώνους συνεχεῖς ἀλλήλοις συνθεὶς, πάντως τετράγωνον ποιήσεις· καὶ ὁντινοῦν τετράγωνον ἄρα διαλύσας, δυνήσῃ δύο ἀπ' αὐτοῦ τριγώνους ποιῆσαι· ἢ πάλιν παντὶ τετραγώνῳ σχήματι, τρίγωνον προσζευχθὲν, ὅθεν ε πεντάγωνον ποιεῖ, οἷον τῷ δ τετραγώνῳ ὁ α τρίγωνος προσζευχθεὶς τὸν ε πεντάγωνον ποιεῖ· καὶ τῷ θ τῷ ἑξῆς προστεθεὶς δηλονότι ὁ γ, πεντάγωνον τὸ ιβ ποιεῖ· τῷ ιϛ ὁντινοῦν ἀκολούθῳ ὁ ϛ ἀκόλουθος ἐπισυντεθεὶς, τὸν κβ ἀκόλουθον ἀποδίδωσι· καὶ τῷ κε, ὁ ι, τὸν λε· καὶ ἀεὶ οὕτως. κατὰ δὲ τὰ αὐτὰ κἂν τοῖς πενταγώνοις οἱ τρίγωνοι προστιθῶνται τῇ αὐτῇ τάξει, τοὺς ἐντάκτους γεννήσωσιν ἑξαγώνους. καὶ πάλιν ἐκείνοις οἱ αὐτοὶ προσπλεκόμενοι, τοὺς ἐν τάξει ἑπταγώνους ποιήσουσι· καὶ μετ' ἐκείνους τοὺς ὀκταγώνους· καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον. πρὸς δὲ ὑπόμνησιν ἐκκείσθωσαν ἡμῖν πολυγώνων στίχοι παραλλήλως γεγραμμένοι, οἵδε, ὁ α, τριγώνων· ὁ μετ' αὐτὸν, τετραγώνων· μετὰ δὲ ἀμφοτέρους, πενταγώνων, εἶτα ἑξαγώνων, εἶτα ἑπταγώνων, εἶτα εἰ ἐθέλοι τις, καὶ τῶν ἑξῆς πολυγώνων· ἔξεστι δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς πολυγώνων· [ἔξεστι δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς πολυγώνων] τὴν ἔκθεσιν, εἰς παρα-

ξῆς τοῦ ἐκ τοῦ κατὰ φύσιν στιχηδὸν ἐκκειμένου ἀριθμητικοῦ χύματος. παραπλησίως γὰρ καὶ ὁμοιοτρόπως ἐπισωρεύονται ἀλλήλοις εἰς πενταγώνου γένεσιν οἱ ἀπὸ μονάδος δύο διαλείποντες ἐφ' ὁσονοῦν, τουτέστιν οἱ τριάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες· ἡ μὲν μονὰς, δυνάμει πρῶτος, καὶ σχηματογραφεῖται οὕτως· ὁ δὲ ε, δεύτερος ἐκ τοῦ α καὶ δ συντεθέντων, σχηματογραφούμενος καὶ αὐτὸς οὕτως· ὁ δὲ ιβ, ὁ τρίτος, ἔκ τε τῶν β προτέρων καὶ τοῦ ζ ἐπισωρευθέντος αὐτοῖς, ἵνα ᾖ αὐτὸς τριάδα πλευρὰν ἔχῃ, ὡς τριάδων συντεθέντων εἰς τὴν αὐτοῦ σύστασιν· ὡς ᾖ ὁ πρὸ αὐτοῦ ὁ ε, δυάδα πλευρὰν εἶχεν, ἐκ δύο συντεθείς· ἡ δὲ σχηματογραφία αὐτοῦ, τοιαύτη ἐστίν· οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις γενήσονται καθεξῆς προσωρευομένων τῶν κατὰ τριάδος ὑπεροχὴν, ἀτάκτων μετὰ τὴν ἐκ δυάδος ὄντων· οἷον τοῦ ι, ιγ, ιϛ, ιθ, κβ, κε· καὶ ἐπ' ἄπειρον. ἔσονται γὰρ κβ, λε, να, ο, ϙβ, ριζ· καὶ τοῦτο μέχρι παντός. ἑξάγωνοι δὲ, καὶ ἑπτάγωνοι, καὶ οἱ ἑξῆς κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον προβιβασθήσονται ἀπὸ τοῦ φυσικοῦ χύματος, ἀεὶ κατὰ μονάδος πρόσθεσιν τῶν ἀπαστάσεων γινομένων. ὡς γὰρ ὁ μὲν τρίγωνος τοὺς μονάδι διαφέροντας μηδὲν παραλείποντας εἰς τὴν σωρείαν, ἐσχόμενος ἀπετελεῖτο· ὁ δὲ τετράγωνος, τοὺς δυάδι μὲν διαφέροντας, ἕνα δὲ παραλείποντας· πεντάγωνος δὲ, ἀκολούθως τοὺς τριάδι μὲν διαφέροντας, δύο δὲ παραλείποντας, οὓς καὶ ἀπεδείξαμεν ὑποδείγματα αὐτῶν τε καὶ τῶν ἀποτελουμένων ἐξ αὐτῶν ἐκθέμενοι· οὕτως καὶ ἑξάγωνοι μὲν, γνώμονας ἕξουσι τοὺς τετράδι μὲν διαφέροντας, τρεῖς δὲ παραλείποντας, ἐξ ὧν συντεθέντων σωρηδὸν, ἀποτελοῦνται· οἷον, τοὺς α, ε, θ, ιγ, ιζ, κα· καὶ ἐφεξῆς, ἵνα οἱ ἀποτελούμενοι ἑξάγωνοι ὦσιν, α, ϛ, ιε, κη, με, ξϛ· καὶ ἀεὶ μέχρις ἄν τις θέλοι. οἱ δὲ τούτοις ἀκόλουθοι ἑπτάγωνοι, τοὺς μὲν γνώμονας ἔχουσι, πεντάδι μὲν διαφέροντας, τετράδι δὲ διαλείποντας· οἷον, α, ϛ, ια, ιϛ, κα, κϛ, λα, λϛ· καὶ ἐφ' ὁσονοῦν. αὐτοὶ δὲ οἱ συνιστάμενοι, εἰσὶν, α, ζ, ιη, λδ, νε, πα, ριβ, ρμη· καὶ τοῦτο μέχρι παντός. ὀκτάγωνοι δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τοῖς τε γνώμοσι ἑξάδι διαφέρουσι προκόπτουσι καὶ τοῖς συστήμασιν ἀνα-

 λόγως.

τὴν ἑαυτοῦ σύστασιν. τετράγωνος δὲ ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ συνεχὴς τού-
τῳ, ὁ μηκέτι τρεῖς ὡς ὁ πρόσθεν· ἀλλὰ τέσσαρας ἐν τῇ καταγρα-
φῇ γωνίας ἀποδιδοὺς ἐν ἰσοπλεύρῳ μὲν τοι καὶ αὐτὸς σχηματισμῷ·
δι' α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ. τούτων γὰρ αἱ καταγρα-
φαὶ, ἰσόπλευροι τετραγωνισμοὶ οὕτω πως γίνονται· καὶ ἐφεξῆς
οὕτως, μέχρις οὗ βούλει· καὶ τούτοις δὲ συμβέβηκεν ὥσπερ καὶ
τοῖς πρὸ αὐτῶν, τὴν τῶν πλευρῶν πρόβασιν κατὰ τὴν φυσικὴν ἀρι-
θμῶν κεῖσθαι. τοῦ μὲν γὰρ δυνάμει πρώτου τοῦ ἑνὸς, πλευρὰ, μο-
νάς· τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ πρώτου τοῦ δ, πλευρὰ, δυάς· τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ
δευτέρου τοῦ θ, πλευρὰ, τριάς· τοῦ δὲ μετ' αὐτὴν ἐνεργείᾳ τρί-
του τοῦ ις, πλευρὰ, τετράς· καὶ τοῦ τετάρτου, πεντάς· καὶ τοῦ
πέμπτου, ἑξάς· καὶ καθόλου ἑξῆς τοῖς ἐφεξῆς. γίνεται δὲ καὶ οὗ-
τος στοιχηδὸν ἐκτεθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ, τῇ μονάδι ἀεὶ σωρευ-
θέντος, οὐκέτι τῶν ἐφεξῆς τοῖς ἐφεξῆς, ὡς δέδεικται· ἀλλὰ τῶν
παρ' ἕνα κειμένων πάντων, τουτέστι τῶν περισσῶν. πρῶτος γὰρ
ὁ α, δυνάμει πρῶτος τετράγωνος· δεύτερος ὁ α καὶ γ ἐνερ-
γείᾳ πρῶτος τετράγωνος· τρίτος δὲ, ὁ α, καὶ γ, καὶ ε ἐνεργείᾳ
δεύτερος τετράγωνος· τέταρτος δὲ, ὁ α, καὶ γ, καὶ ε, καὶ ζ, ἐ-
νεργείᾳ τρίτος τετράγωνος· ὁ ἑξῆς τοῖς πρώτοις προσσωρευθέντος
τοῦ θ γίνεται· καὶ ὁ μετ' αὐτὸν, τοῦ ια προστεθέντος· καὶ οὕτως ἀ-
εί· καὶ ἔτι τούτων δὲ συμβέβηκε τοσούτων μονάδων τὴν ἑκάστου
πλευρὰν εἶναι, ὁπόσοι περ ἂν ὦσιν οἱ εἰς τὴν αὐτοῦ γένεσιν ἐπι-
σωρευθέντες ἀριθμοί. πεντάγωνος δὲ ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ καὶ αὐτὸς
κατὰ τὴν ἐξάπλωσιν τὴν εἰς μονάδας σχηματογραφούμενος ἔτι-
δὲ εἰς πενταγωνικὸν σχῆμα πάντῃ ἰσόπλευρον· δι' α, ε, ιβ,
κβ, λε, να, ο· καὶ οἱ ἀνάλογοι. ἀλλ' ἔστι τοῦ μὲν πρώτου κατ' ἐνέρ-
γειαν, τουτέστι, τοῦ ε ἑκάστου, πλευρὰ, δυάς· μονὰς μὲν γὰρ τοῦ δυνά-
μει πρώτου πενταγώνου ὑπάρχει τοῦ ἑνός· τοῦ δὲ τῶν ἐκκειμέ-
νων δευτέρου τοῦ ιβ, πλευρὰ, τριάς· καὶ τοῦ μετ' αὐτὸν τοῦ κβ, τε-
τράς· καὶ τοῦ ἑξῆς τοῦ λε, πεντάς· καὶ ἑξὰς, τοῦ ἔτι τούτῳ τοῦ να·
καὶ ἀεὶ οὕτως. καθόλου γὰρ τοσούτων μονάδων ἡ πλευρά ἐστιν,
ὅσοι περ εἰς τὴν αὐτοῦ σύστασιν συνεσωρεύθησαν ἀριθμοί. ἐκλέ-
γονται

ἔστιν. ἐκ τούτων ἂν καὶ συσταίη τὰ λοιπά· αὐτὸ δὲ ἐξ οὐδενός· στοιχεῖον ἄρα τοῦτο τῶν ἄλλων, αὐτοῦ δὲ οὐδέν· κἀν τοῖς ἀριθμητικοῖς δὲ ἐπιπέδοις, προϊὼν ὁ λόγος βεβαιώσει τὸ λεγόμενον. τρίγωνος μὲν οὖν ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ διαλυόμενος εἰς μονάδας καὶ τὴν κατ' ἐπίπεδον θέσιν τῶν μορίων ἰσόπλευρον σχηματογραφῶν, εἰς τριγωνισμόν· οὗ ὑποδείγματα, ὁ γ, ς, ι, ιε, κα, κη, λς· καὶ οἱ ἐφεξῆς. σχηματογραφίαι γὰρ αὐτῶν εὔτακτοι ἔσονται, τρίγωνοί τε ἅμα καὶ ἰσόπλευροι· καὶ τὸ τοιοῦτον μέχρις οὗ βούλει προκόπτων τριγωνιζόμενον εὑρήσεις πρὸ πάντων στοιχειωδέστατον τάτ-των τὸ ἐκ μονάδος γινόμενον· ἵνα καὶ τρίγωνος δυνάμει φαίνηται ἡ μονάς· ἐνεργείᾳ δὲ, πρῶτος ὁ τρία. πλευραὶ δὲ παραζευχθήσονται τῷ συνεχεῖ ἀριθμῷ· τοῦ μὲν γὰρ δυνάμει πρώτου, πλευρὰ μονάς· τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ πρώτου, πλευρὰ, δυάς, τουτέστι, τοῦ τρία· τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ δευτέρου, πλευρὰ † τουτέστι τοῦ ς τριάς· τοῦ δὲ † τρίτου πλευρὰ, τετράς· καὶ τοῦ τετάρτου, πεντάς· καὶ τοῦ πέμπτου, ἑξάς· καὶ ἀεὶ οὕτως. γίνονται δὲ, τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ στιχηδὸν ἐκτεθέντος, καὶ ἀεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἕνα συντιθεμένων. κατὰ γὰρ ἑκάστην σύνθεσιν καὶ πρόσθεσιν σώρευσιν, οἱ εὔτακτοι τρίγωνοι συντελοῦνται· οἷον ἐκ μὲν τοῦ φυσικοῦ στίχου τούτου, α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ, ιδ, ιε· τὸν μὲν πρώτιστον λαβὼν, ἔχω τὸν δυνάμει πρῶτον τρίγωνον, τὴν μονάδα· εἶτα τοὺς συνεχῆ αὐτῷ ἐπισωρεύσας, ἔχω τὸν ἐνεργείᾳ πρῶτον τρίγωνον· δύο γὰρ καὶ ἓν ὁ γ ἐστὶ καὶ τῇ γε σχηματογραφίᾳ οὕτως συνίσταται, ὑπὸ μιᾷ μονάδι β μονάδες παράλληλοι ὑποτίθενται· καὶ τριγωνίζεται ὁ γ ἀριθμός· εἶτα ἑξῆς ἐπὶ τούτοις ὁ γ· συνεχὴς προσσωρευθεὶς καὶ ἐξαπλωθεὶς εἰς μονάδας, καὶ συντεθεὶς, τοῦ στίχου ἀποδίδωσι δεύτερον ἐνεργείᾳ τρίγωνον, καὶ προσέτι σχηματογράφει. καὶ πάλιν ὁ φύσει ἀκόλουθος ὁ δ ὑπὸ τούτοις σωρευθεὶς καὶ μοναδιστὶ ὑπογραφεὶς, τὸν εὔτακτον μετὰ τοὺς εἰρημένους ἀποδίδωσι τὸν ι καὶ τριγωνίσει γε σχηματίζεται· καὶ ὁ ε ὑπὸ τούτῳ· εἶτα ὁ ς· εἶτα ὁ ζ, καὶ οἱ ἑξῆς ἅπαντες· ὥστε ἐμμελῶς καὶ τὰς πλευρὰς ἑκάστου τούτων τῶν μονάδων, ὁπόσοι περ ἀριθμοὶ συντεθῆσιν ἐκ τοῦ φυσικοῦ στίχου εἰς

τὴν

διαστατόν. καὶ πάλιν τὸ διχῆ διαστατὸν πάντως ἐπιφάνεια. ἑνὶ ἄρα διαστήματι ἡ λάττων ἐπιφάνεια στερεοῦ· ἑνὶ δὲ γραμμὴ, ἐπιφανείας, οὖσα τὸ ἐφ' ἓν διαστατὸν, καὶ ἑνὸς μόνου τετυχηκυῖα διαστήματος· λειπομένη δὲ στερεοῦ, δυσὶ διαστήμασι· ταύτης δ' αὖ τοῦ λείπεται ἑνὶ διαστήματι τὸ σημεῖον. διὰ τοῦτο προελέχθη εἶναι ἀδιάστατον· στερεοῦ μὲν, τρισὶ διαστήμασι λειπομένου· ἐπιφανείας δὲ, δυσί· γραμμῆς δὲ, ἑνί. ἔστιν οὖν σημεῖον ἀρχὴ διαστήματος, οὐ διάστημα δέ· τὸ αὐτὸ καὶ ἀρχὴ γραμμῆς, οὐ γραμμὴ δέ· καὶ γραμμὴ ἀρχὴ ἐπιφανείας, οὐκ ἐπιφάνεια δέ· καὶ ἀρχὴ τοῦ διχῆ διαστατοῦ, οὐ διχῆ δὲ διαστατόν. καὶ εἰκότως ἡ ἐπιφάνεια ἀρχὴ σώματος, οὐ σῶμα δέ· καὶ ἡ αὐτὴ ἀρχὴ μὲν τοῦ τριχῆ διαστατοῦ, οὐ τριχῆ δὲ διαστατόν· οὕτως δὴ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, ἡ μὲν μονὰς, ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ, ἐφ' ἓν διάστημα κατὰ μονάδα προβιβαζομένου· ὁ δὲ γραμμικὸς ἀριθμὸς, ἀρχὴ ἐπιπέδου ἀριθμοῦ ἐφ' ἕτερον διάστημα ἐπιπέδως πλατυνομένου· ὁ δὲ ἐπίπεδος ἀριθμὸς, ἀρχὴ στερεοῦ ἀριθμοῦ, ἐπὶ τρίτον διάστημα πρὸς τὰ ἐξ ἀρχῆς βάθη τι προσκτωμένου· ὅθεν καθ' ὑποδιαίρεσιν γραμμικοὶ μέν εἰσιν ἀριθμοὶ ἁπλῶς ἅπαντες οἱ ἀπὸ δυάδος ἀρχόμενοι· καὶ κατὰ μονάδος πρόσθεσιν ἐπὶ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ προχωροῦντες διάστημα. ἐπίπεδοι δὲ, οἱ ἀπὸ τριάδος ἀρχόμενοι, ἀρχικωτάτης ῥίζης, καὶ διὰ τῶν ἑξῆς συνεχῶν ἀριθμῶν προϊόντες, λαμβάνοντες καὶ τὴν ἐπωνυμίαν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. πρῶτοι μὲν, τρίγωνοι· εἶτα μετ' αὐτοὺς, τετράγωνοι· εἶτα μετ' αὐτοὺς, πεντάγωνοι· καὶ μετὰ τούτους, ἑξάγωνοι, καὶ ἑπτάγωνοι· καὶ ἐπ' ἄπειρον. προσαγορευόντων δὲ, ὡς ἔφαμεν, ἀπὸ τῆς ἀπὸ τριάδος ἐφεξῆς κειμένων ἀριθμῶν. ἀρχικώτατον ἄρα σχῆμα ἐπιπέδων, τὸ τρίγωνον, καὶ στοιχειωδέστατον, ὡς εἴσκειται. καὶ γοῦν ἐν τοῖς γραμμικοῖς ἐπιπέδοις, ἐὰν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰ μέσα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, λυθήσεται ἕκαστον εὐθύγραμμον σχῆμα πάντως εἰς τρίγωνα τοσαῦτα, ὅσαι περ ἂν αὐτοῦ τυγχάνωσιν αἱ πλευραί. αὐτὸ δὲ τὸ τρίγωνον τὸ αὐτὸ τοῖς ἄλλοις παθὸν, εἰς ἕτερόν τι οὐ μεταπεσεῖται, ἀλλ' εἰς ἑαυτὸ στοιχεῖον. ἄρα καὶ ἐν ἐκείνοις τὸ τρίγωνον· εἰς αὐτὸ γὰρ τὰ ἄλλα πάντα ἀναλύεται ἀναγκαίως, αὐτὸ δὲ οὐκ εἰς

ταῖς δὲ, αααᾶ· ἢ εἰς πλείονα ἀεὶ ἀναλόγως. ἔσται οὖν ἡ μὲν μονάς, σημείου τόπον ἐπέχουσα, καὶ τρόπον· ἀρχὴ μὲν διαστημάτων καὶ ἀριθμῶν, οὔπω δὲ διαστήματα οὐ δὲ ἀριθμός· ὡς τὸ σημεῖον, ἀρχὴ μὲν γραμμῆς ἢ διαστήματος, οὔπω γραμμὴ, οὐδὲ διάστημα. ἀμέλει οὔτε σημείῳ σημεῖον συντεθὲν, διάστημα οὐχ ἕξει ὥσπερ εἴ τις τὸ οὐδὲν οὐδενὶ συντεθὲν σκέψοιτο· οὐδὲν γὰρ ποιεῖ· κατὰ ταυτὰ γὰρ ἐφαίνετο καὶ ἐπὶ τῆς ἰσότητος ἡμῖν ἐν ταῖς σχέσεσι. σώζεται μὲν γὰρ ἀναλογία ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν β, ὁ β πρὸς τὸν τρίτον· οὐ μὴν διάστημά τι γεννᾶται τοῖς ἄκροις πρὸς ἀλλήλους, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν χωρὶς ἰσότητος σχέσεων πασῶν. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ μονὰς ἐκ παντὸς μόνη τοῦ ἀριθμοῦ ἑαυτὴν πολλαπλασιάσασα οὐδὲν πλέον ἑαυτοῦ γεννᾷ. ἀδιάστατος ἄρα ἐστὶν ἡ μονάς, καὶ ἀρχοειδής· πρῶτον δὲ διάστημα, εὑρίσκεται καὶ φαίνεται ἐν τριάδι, εἶτα ἐν τετράδι· καὶ ἑξῆς ἐν τοῖς ἀκολούθοις· διάστημα γάρ ἐστι δυοῖν ὅρων τὸ μεταξὺ θεωρούμενον. πρῶτον γὰρ διάστημα, γραμμὴ λέγεται· γραμμὴ γάρ ἐστι τὸ ἐφ᾽ ἓν διαστατόν· δύο δὲ διαστήματα, ἐπιφάνεια· ἐπιφάνεια γάρ ἐστι τὸ διχῆ διαστατόν· τρία δὲ διαστήματα, στερεόν· στερεὸν γάρ ἐστι τὸ τριχῆ διαστατόν· καὶ οὐκ ἔστιν οὐδαμῶς ἐπινοεῖν στερεὸν, ὃ πλεόνων τέτευχε διαστημάτων ἢ τριῶν, μήκους, πλάτους, βάθους. τούτοις γοῦν ἐκλεγόμεναι περὶ πᾶν σῶμα ὑπάρχειν ἓξ περιστάσεις ὁρίζονται· καθ᾽ ἃς αἱ κατὰ τόπον κινήσεις διακρίνονται· πρόσω, ὀπίσω, ἄνω, κάτω, δεξιά, ἀριστερά. ἑκάστῳ γὰρ διαστήματι, δύο ἐξ ἀνάγκης περιστάσεις παρέπονται, ἀλλήλαις ἀντίθετοι· ἐνὶ μὲν, αἱ ἄνω καὶ κάτω· ἑκατέρῳ δὲ, αἱ πρόσω καὶ ὀπίσω· τῷ τρίτῳ δὲ, ἐπὶ δεξιᾷ καὶ ἀριστερᾷ. καὶ συμβαίνει πως οὕτως ἀναστρέφειν τὸν λόγον· εἴ τι γὰρ στερεόν ἐστιν, ἐκεῖνο τὰς τρεῖς διαστάσεις πάντως ἔχει, μῆκος, βάθος, καὶ πλάτος· καὶ ἔμπαλιν, εἴ τι ἔχει τὰς τρεῖς διαστάσεις, ἐκεῖνο πάντως στερεόν ἐστιν, ἄλλο δ᾽ οὐδέν· οὐκ ἄρα τὸ δύο μόνον ἔχον διαστάσεις, ἔσται στερεὸν, ἀλλ᾽ ἐπιφάνεια· αὕτη γὰρ διαστημάτων ἐπιδεκτικὴ δυοῖν ἐστι μόνων. καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ δυνατὸν ὁμοιοτρόπως ἀντιστρέφειν τὸν λόγον. ἐπιφάνειά τε γὰρ ὀρθῶς τὸ διχῆ

φαίνεται. μέχρι μὲν οὖν τοῦδε ἱκανῶς περὶ τοῦ πρὸς ἕτερόν πως ἔχοντος ποσοῦ διειλέγμεθα, συμμετρησάμενοι κατ' ἐκλογὴν τὰ προσήκοντα καὶ εὐπερίληπτα τῇ τῶν ἄρτι εἰσαγομένων ἕξει· τὰ γὰρ εἰς τὴν τούτων τέχνην τὰ ὑπόλοιπα, πρὸς πληρωθήσεται· διαλιπόντων πάλιν ἡμῶν καὶ προτεχνολογησάντων ἕτερά τινα προὐργιαίτερον τὴν σκέψιν ἔχοντα ἐκ τῶν συμβεβηκότων τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ, καὶ μὴ τοῦ πρὸς ἕτερόν πως ἔχοντι. ἀεὶ γὰρ δι' ἀλλήλων φιλεῖ πως διαρθροῦσθαι καὶ σαφηνίζεσθαι τὰ ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρήματα· ἃ δὲ χρὴ προεπισκοπῆσαι καὶ προθεάσασθαι, ἐστὶ περί τε γραμμικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπιπέδων καὶ στερεῶν· κυβικῶν τε καὶ σφαιρικῶν, καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ σκαληνῶν· πλινθίδων τε καὶ δοκίδων, καὶ σφηνίσκων, καὶ τῶν ὁμοίων, ἃ δὴ ἰδίως μὲν ἐν τῇ γεωμετρικῇ παραδίδοται εἰσαγωγῇ, τοῦ πηλίκου οἰκειότερα ὄντα· σπερματικώτερον δὲ προσλαμβάνεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὡς ἂν μητρὶ, καὶ ἀρχεγονωτέρα ἐκείνης. μεμνήμεθα γὰρ ὅτι πρὸ βραχέος τοιαύτη ἡ μὲν ἐφάνη συναναιροῦσα μὲν τὰς ἄλλας ἑαυτῇ ἐπιστήμας. οὐ συναναιρουμένη δὲ ἐκείναις καὶ ἔμπαλιν συνεπιφερομένη μὲν ἐκείναις ἀναγκαίως, οὐ συνεπιφέρουσα δὲ αὐτὰς ἑαυτῇ. πρότερον δὲ ἐπιγνωστέον, ὅτι ἕκαστον γράμμα ᾧ σημειούμεθα ἀριθμὸν, οἷον τὸ ι, ᾧ τὰ δέκα, τὸ κ· τὸ ω, ᾧ τὰ ὀκτακόσια, νόμῳ καὶ συνθήματι ἀνθρωπίνῳ, ἀλλ' οὐ φύσει σημαντικόν ἐστι τοῦ ἀριθμοῦ. ἡ δὲ φυσικὴ καὶ ἀμέθοδος καὶ διὰ τοῦτο ἁπλουστάτη σημείωσις τῶν ἀριθμῶν, εἴη ἂν ἡ τῶν μονάδων τῶν ἐν ἑκάστῳ οὐσῶν παράλληλος ἔκθεσις, οἷον, μιᾶς μὲν μονάδος γραφὴ, διὰ τοῦ ἑνὸς α, σημεῖον ἔσται τοῦ ἑνός· δυοῖν δὲ μονάδων παραλλήλων, τουτέστι δυοῖν ἄλφα, ἔκθεσις, σημεῖον ἔσται τῆς δυάδος· τριῶν δὲ ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις κειμένων, τριάδος ἔσται χαρακτὴρ· καὶ τεσσάρων ἐπ' εὐθὺ τεταγμένων, τετράδος· καὶ ε πεντάδος, καὶ ἀεὶ οὕτως. διὰ γὰρ τῆς τοιαύτης γραφῆς καὶ σημάνσεως, ἡ τῶν φραθησομένων ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν σχηματογραφία τρανωθῆναι δύναιτ' ἂν μόνως καὶ σαφηνισθῆναι· οἷ μονὰς μὲν, α· δυὰς δὲ, αα· τριὰς δὲ, ααα· τετρὰς δὲ, αααα· πεν-

τὰς

εἰ δὴ συντεθέντα ποιητικὰ εἶναι τοῦ τῶν πολλαπλασίων πρώτου εἴδους. πάλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς τὸ γεννηθὲν ἀπὸ τοῦ πολλαπλασίου πρώτιστον εἶδος, μετὰ τοῦ πρώτου τῶν ἐπιμορίων εἴδους ἀποδοτικὸν γίνεται τοῦ ὁμογενοῦς αὐτῶν συνεχοῦς εἴδους, τουτέστι, τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, ὅπερ ἐστὶ, τριπλασίου. ἐκ γὰρ παντὸς διπλασίου καὶ ἡμιολίου συντεθέντων, τριπλάσιον ἐξ ἀνάγκης φύεται· οἷον, ἐπεὶ τοῦ ϛ διπλάσιος ὁ ιβ, αὐτοῦ δὲ τούτου ἡμιόλιος ὁ ιη· εὐθὺς καὶ τριπλάσιος ὁ ιη τοῦ ϛ· καὶ ἑτέρῳ τρόπῳ, ἂν μὴ τὸν ιβ θέλω μεσιτεύειν, ἀλλὰ μᾶλλον τὸν τοῦ ϛ ἡμιόλιον τὸν θ, τὸ αὐτό μοι ἀπαράλλακτον καὶ σύμφωνον συμβήσεται· τοῦ γὰρ θ ὁ ιη διπλάσιος ὢν, τὸν τριπλάσιον λόγον σώσει πρὸς τὸν ϛ. ἐξ ἡμιολίου ἄρα καὶ διπλασίου πρώτων εἰδῶν ἐπιμορίου καὶ πολλαπλασίου συνίσταται μιχθέντων, τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου, τὸ τριπλάσιον· καὶ εἰς αὐτὰ δὲ πάντως ἀναλύεται. ἰδοὺ γὰρ ὁ ϛ, τοῦ β τριπλάσιος ὢν, ἕξει μέσον τὸν γ· ὃς δύο λόγους παραδείξει, τὸν μὲν ἡμιόλιον, πρὸς τὸν β· πρὸς ἑαυτὸν δὲ διπλάσιον τὸν τοῦ ϛ· ἐὰν δὲ καὶ ὁ τριπλάσιος οὗτος δεύτερον εἶδος ὢν τοῦ πολλαπλασίου, συντεθῇ ἐπιτρίτῳ δευτέρῳ εἴδει ὄντι τοῦ ἐπιμορίου, γένοιτ᾽ ἂν ἐξ ἀμφοτέρων τὸ συνεχὲς τοῦ πολλαπλασίου † συντεθῇ ἐπιτρίτῳ, δευτέρῳ εἴδει ὄντι τοῦ ἐπιμορίου, γένοιτ᾽ ἂν ἐξ ἀμφοτέρων τὸ συνεχὲς τοῦ πολλαπλασίου εἶδος, τουτέστι, τὸ τετραπλάσιον, ὃ καὶ ἀναγκαίως εἰς ἀμφότερα ἀναλυθήσεται, κατὰ τὴν αὐτὴν τοῖς προδεδηλωμένοις φύσιν. τὸ δὲ τετραπλάσιον προσλαβὼν τὸ ἐπιτέταρτον ποιητικὸν ἔσται τοῦ πενταπλασίου. καὶ πάλιν ἐκεῖνο σὺν τῷ ἐπιπέμπτῳ, τοῦ ἑξαπλασίου· καὶ τοῦτο μέχρι παντὸς, ἵνα εὔτακτοι οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλάσιοι μετὰ εὐτάκτων τῶν ἐξ ἀρχῆς ἐπιμορίων, ἀποδοτικοὶ εὑρίσκονται τῶν ἑνὶ τὸ μεῖζον συνεχῶν πολλαπλασίων. διπλάσιος μὲν γὰρ μεθ᾽ ἡμιολίου, τριπλασιότητος ποιητικός· τριπλάσιος δὲ, μετ᾽ ἐπιτρίτου, τετραπλασιότητος· τετραπλάσιος δὲ, μετὰ ἐπιτετάρτου, πενταπλασιότητος· καὶ ἕως προχωρεῖν θέλεις, οὐδὲν ὑπεναντίον συμβαίνει

αὐτοῦ μὲν γὰρ πρῶτος ὁ λϛ· ζεύγου δὲ δεύτερος, ὁ μη· τρίτος δὲ ζεύγου, ὁ ξδ· ὅς, οὐκέτι τρίτον μέρος ἔχει, διὸ οὐδ' ἐπιτρίτου δεικτικός· καὶ ὁ τέταρτος, τεσσάρων ἡγεμών ἐστι λόγων· καὶ ὁ πέμπτος, δηλονότι πέντε. τὸ δὲ ὑπόδειγμα τοιοῦτον· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ πολλαπλασίων ὁ αὐτὸς τῶν διαγραμμάτων ἔστω σοι τρόπος, παρατηροῦντι ὅτι καὶ ἐνταῦθα ἡ φύσις, ὥσπερ καὶ ἐν τοῖς προτεχνολογηθεῖσιν εὕρομεν, προσγενεστέρους ἡμῖν παρεμφαίνει διπλασίους μὲν, τριπλασίων· τριπλασίους δὲ, τετραπλασίων· ζεύγους δὲ, πενταπλασίων· καὶ ἀεὶ οὕτως μέχρι παντός. οἱ μὲν γὰρ ἐπὶ πλάτος στίχοι οἱ ἀνωτάτω, ἐὰν ὦσι διπλάσιοι, ὁμοίως ἕξουσι τοὺς ὑπ' αὐτοὺς παραλλήλους κειμένους· τοὺς δὲ ὑποτείνοντας διαγωνίους, τοῦ αὐτοῦ γένους τὸ συνεχὲς καὶ μονάδος μεῖζον εἶδος, ὅ ἐστι, τριπλασίους, ἐν παραλλήλῳ ἐξετάσει θεωρουμένους. εἰ δ' οἱ ἐπὶ πλάτους εἶεν τριπλάσιοι, πάντως οἱ διαγώνιοι ἔσονται τετραπλάσιοι· εἰ δὲ ἐκεῖνοι τετραπλάσιοι, εὐθὺς οὗτοι πενταπλάσιοι· καὶ τοῦτο μέχρις ἀεί· λοιπὸν δεῖ προσαφηνίζοντας τὰς τῶν λόγων συνθέσεις, τίνων ἑτέρων ἀποδοτικαί εἰσι, μεταβῆναι ἐπὶ τὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἀκόλουθα. οἱ πρῶτοι τοίνυν τοῦ ἐπιμορίου δύο λόγοι συλληφθέντες εἰς τὸ αὐτὸ γεννῶσι τὸν τοῦ πολλαπλασίου α λόγον, τουτέστι, τὸν διπλάσιον· πᾶς γὰρ διπλάσιος, σύστημα ἔσται ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου· καὶ πᾶς ἡμιόλιος καὶ ἐπίτριτος συντεθέντες, ἀποδοτικοὶ ἑνὸς διπλασίου πάντως ἔσονται· οἷον, ἐπεὶ ὁ γ, ἡμιόλιος τοῦ β, ὁ δὲ δ ἐπίτριτος τοῦ γ, ἔσται τοῦ β ὁ δ διπλάσιος, σύνθετος ὢν ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου. καὶ πάλιν, ἐπεὶ ὁ ϛ διπλάσιός ἐστι τοῦ γ, εὑρήσομεν ἀνὰ μέσον αὐτῶν ἀριθμόν τινα τεταγμένον, ὃς ἐξ ἀνάγκης πρὸς μὲν τὸν ἕτερον, τὸν ἐπίτριτον σώζει λόγον· πρὸς δὲ τὸν λοιπὸν, ἡμιόλιον. ὁ γοῦν δ, ἀνὰ μέσον κείμενος τοῦ ϛ καὶ τοῦ γ, πρὸς μὲν τὸν γ ἀποδίδωσι λόγον ἐπίτριτον· πρὸς δὲ τὸν ϛ, τὸν ἡμιόλιον. ὀρθῶς ἄρα ἐλέχθη διαλυόμενον μὲν τὸν διπλάσιον, εἰς ἡμιόλιον καὶ ἐπίτριτον διαλύεσθαι. συντεθειμένου δὲ πάντως ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου, μόνον συνίστασθαι διπλάσιον. καὶ τὰ τοῦ ἐπιμορίου δύο πρῶτα

εἴδη

κἀκεῖνοι καὶ αὐτοὶ ἰσάριθμοι τοῖς γεννῶσιν οἱ γεννώμενοι καὶ περαιούμενοί γε μετ' αὐτὴν αὐτάρκη αὐτῶν προκοπῆς, εἰς ἀριθμοὺς μὴ ἐπιδεκτικοὺς τρίτων. καὶ ἐπιτέταρτοι δὲ, κατὰ ταυτὸν ἐκ τετραπλασίων, ὑποθρύφωσιν, λαμβάνοντες ἀριθμὸν μετὰ τὴν αὐτάρκη πρόβασιν, τετάρτων μὴ ἐπιδεκτικόν· οἷον διπλασίων μὲν ὑποδείγματος χάριν ἰσαρίθμους γεννώντων ἡμιολίους, ὁ μὲν ἄνω στίχος ἔσται πολλαπλασίων ὁ πρῶτος, α, β, δ, η, ιϛ, ξδ· ἐπεὶ δὲ πρῶτός ἐστιν ὁ δύο μετὰ τὴν μονάδα, ἐκεῖνος κατάρξει τούτος ἡμιολίου μόνου τοῦ γ· ὅς τις ἡμίσους ἐπιδεκτικὸς οὐκ ἔστιν, ἵνα καὶ δῆλος αὐτοῦ γένηται ἡμιόλιος. ὁ πρῶτος ἄρα διπλάσιος, ἐκεῖνος μόνου γεννητικός ἐστιν ἡμιολίου· ὁ δὲ δεύτερος ὁ δ, δυοῖν γεννητικὸς ἡμιολίων· αὐτοῦ μὲν, ὁ ϛ· τοῦ δὲ ϛ, ὁ θ· τοῦ θ, οὐκ ἔστιν δῆλος· ἥμισυ γὰρ οὐκ ἔχει. ὁ δὲ η, γ ὢν διπλάσιος, τριῶν ἡμιολίων ἔσται πατήρ· ἐκείνου μὲν τοῦ ιβ, πρὸς αὐτόν· ἑτέρου δὲ, τοῦ ιη πρὸς τὸν ιβ· τρίτου δὲ τοῦ κζ, πρὸς τὸν ιη· τετάρτου δὲ, οὐκέτι διὰ τὸ καθολικόν· ὁ γὰρ κζ ἥμισυ οὐκέτι ἐπιδέχεται. ὁ δὲ ιϛ, δ ὢν διπλάσιος, τεσσάρων ἡγήσεται ἡμιολίων· τοῦ κδ, τοῦ λϛ, τοῦ νδ, καὶ τοῦ πα, τοῦ τελευταίου· ἵνα ἰσάριθμοι ἀναγκαίως ὦσι τοῖς γεννήσασιν· ὁ γὰρ πα, οὐκέτι ἥμισυ φύσει ἐπιδέχεται. καὶ τοῦτο μέχρις ἀπείρου προϊὼν ἀνάλογον εὑρήσεις, οἷον ὑποδείξεως ἕνεκα γεγράφθω οὕτως διπλασίου διάγραμμα. τριπλασίου δὲ ὑπόδειγμα παραπλήσιον διαγράφειν δεῖ· ἐν ᾧ κατὰ ταυτὸν ὀψόμεθα τὸν μὲν α, τὸν γ, ἐκεῖνος μόνου ἐπιτρίτου ἡγούμενον λόγον τοῦ δ πρὸς αὐτόν· ὅς τις ἀποκλείσει εὐθὺς ἑτέρου γένεσιν ὁμοίου· τρίτον γὰρ οὐκ ἐπιδέχεται ὁ δ· οὐκ ἄρα οὐδ' ἐπίτριτον ἕξει. δεύτερος δὲ τριπλάσιός ἐστιν, ὁ θ· ἀλλὰ τοῦτο δυοῖν μόνων ἐπιτρίτων κατάρξει λόγων· τοῦ τε ιβ πρὸς αὐτόν· καὶ τοῦ ιϛ, πρὸς τὸν ιβ· ὁ τε ιϛ ἀνακόπτει τὴν πρόβασιν λοιπόν· τρίτον γὰρ οὐκ ἔστιν ἐπιδεκτικός· διόπερ οὐδὲ ἐπίτριτόν τινα ἔχει ἐν ἑαυτῷ. ἑξῆς δὲ τέτακται τριπλάσιος ὁ μ, ἐν τρίτῃ ἀπὸ μονάδος χώρᾳ τριπλασίων προχωρούντων, α, γ, θ, κζ· ἀλλὰ τοῦτο τριῶν μόνων κατάρξει. καὶ αὐτὸς ἐπιτρίτων λόγων, πλειόνων δὲ οὐδαμῶς·

του καὶ δύο τοιούτων δευτέρων ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, τουτέστι ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν δοθέντων σοι, τὸ λειπόμενον, τρίτον ὅρον· καὶ ἔσονται αἱ γινόμεναι ἐν ἄλλῃ τινὶ σχέσει πρεσβυτέρᾳ κατὰ φύσιν. πάλιν δὲ ἀπ' αὐτῶν τούτων, τῷ αὐτῷ τρόπῳ ἂν ἀφέλῃς ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων τὸ λειπόμενον, οἱ τρεῖς ὅροι ἀναποδισμένοι σοι εὑρεθήσονται εἰς πυθμενικωτέρους ἄλλους τρεῖς· καὶ τοῦτο ἀεὶ ἀκόλουθον εὑρήσεις γινόμενον, μέχρις ἂν εἰς ἰσότητα ἀναλυθῶσιν· ἐξ οὗ πᾶσα ἀνάγκη δηλονότι, ἀποφαίνεσθαι τὴν ἰσότητα, τοῦ πρός τι ποσοῦ στοιχεῖον πάντως εἶναι. παρέπεται δὲ τῇ τοιαύτῃ θεωρίᾳ ἐμμουσώτατόν τι θεώρημα καὶ χρησιμώτατον εἴς τε τὴν πλατωνικὴν ψυχογονίαν καὶ εἰς τὰ ἁρμονικὰ διαστήματα πάντα. κελευόμεθα γὰρ ἐκεῖ πυκνῶς λόγου χάριν ἀποστῆσαι ἐφεξῆς δύο ἡμιολίους λόγους, ἢ τρεῖς, ἢ τέσσαρας, ἢ πέντε, ἢ ἐπ' ἄπειρον· ἢ δύο ἐπιτρίτους, ἢ ἐπιτετάρτους, ἢ ἐπογδόους, ἢ οἵους δήποτε ἐπιμορίους· καὶ καθ' ἕκαστον αὐτῶν ἢ τρεῖς, ἢ τέσσαρας, ἢ πέντε, ἢ μέχρις ὅσον τις προστάσσει· εὔλογον δὲ ἔστι μὴ ἰδιωτικῶς καὶ ἀνεπιστημόνως, ἔστι δ' ὅτε καὶ διημαρτημένως τὸ τοιοῦτον ποιεῖν, ἀλλ' ἐντέχνως, καὶ ἀπταίστως, καὶ τάχιστα ἐφ' ὁδῷ τοιαύτῃ.

Μέθοδος ὅπως δεῖ ἐκ τῶν πολλαπλασίων, τοὺς ἐπιμορίους εὑρίσκειν.

Ἅπας πολλαπλάσιος τοσούτων ἐπιμορίων ἡγήσεται λόγων ἀντιπαρωνύμων αὐτῷ, ὁπόσος ἂν αὐτὸς ὢν τυγχάνει ἀπὸ μονάδος, οὔτε δὲ πλειόνων, οὔτε ἐλαττόνων οὐδὲ μιᾷ μηχανῇ. διπλάσιοι μὲν οὖν, ἡμιολίους φύσει δὴ ὁ πρῶτος, εἷς ὁ δεύτερος, δύο ὁ τρίτος, τρεῖς ὁ τέταρτος, τέσσαρας ὁ πέμπτος, πέντε ὁ ἕκτος, ἓξ ἢ οὔτε πλείονας, οὔτε ἐλάττονας, ἀλλ' ὑπ' ἀνάγκης πάσης ὅταν τὴν σύμμετρον ποσότητα ἀπολάβωσιν οἱ κινηθέντες ἀριθμοὶ γενόμενοι τοῖς κινήσασι πολλαπλασίοις. τό τε δὴ ἔκ τινος δαιμονίας μηχανῆς, εὑρίσκεται ὁ πάντας περαιῶν ἀριθμός, ἀνεπίδεκτος ὢν φύσει ἐκείνου τοῦ μορίου καθὸ προέκεινται οἱ ἐπιμόριοι· ἀπὸ δὲ τῶν τριπλασίων, οἱ ἐπίτριτοι πάντες προ-

κόψουσι

ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΙΝΟΥ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ ΤΩ͂Ν ΕἸΣ ΔΥΌ, ΤῸ ΔΕΎΤΕΡΟΝ.

Ἐπειδὴ στοιχεῖον λέγεται, καὶ ἔστιν ἐξ οὗ ἐλαχίστου συνίσταταί τι καὶ εἰς ὃ ἐλάχιστον ἀναλύεται (οἷον) γράμματα μὲν τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς, στοιχεῖα λέγεται· ἐξ αὐτῶν τε γὰρ ἡ σύστασις τῆς συμπάσης ἐνάρθρου φωνῆς· φθόγγοι δὲ, μελῳδίας ἁπάσης φωνῆς ἄρχεται συγκρίνεσθαι, καὶ εἰς οὓς ἀναλύεται· κοινῇ δὲ τοῦ κόσμου, τὰ λεγόμενα τέσσαρα στοιχεῖα ἁπλῶς ὑπάρχει σώματα, πῦρ, ὕδωρ, ἀήρ, γῆ· ἐκ γὰρ πρωτίστων αὐτῶν ἡ σύστασις τοῦ παντὸς φυσιολογεῖται, καὶ εἰς αὐτὰ ἔσχατα ἐπινοεῖται ἡ ἀνάλυσις.) ἀποδεῖξαι δὲ βουλόμεθα, ὅτι καὶ ἡ ἰσότης στοιχεῖόν ἐστι τοῦ πρός τι ποσοῦ· τοῦ γὰρ ἁπλῶς καὶ καθ' αὑτὸ ποσοῦ μονὰς ἦν καὶ δυὰς τὰ ἀρχικώτατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν ἐλαχίστων ἐπ' ἄπειρον ἀεὶ συνίσταται καὶ αὔξεται καὶ ἤδη εἰς μεῖον ἀναλυόμενα ἵσταται· ἀλλὰ τὴν μὲν ἤδη τῆς ἀνισότητος προκοπὴν καὶ ἐπαύξησιν ἀπεδείξαμεν ἀπὸ ἰσότητος γινομένην ἤδη πάσας ἁπλῶς τὰς σχέσεις μετά τινος εὐταξίας διὰ τριῶν προσταγμάτων· λοιπὸν δ', ἵνα ὡς ἀληθῶς στοιχεῖον ᾖ, ἀποδεικνύειν ὅτι καὶ αἱ ἀναλύσεις ἐπ' αὐτὴν ἐσχάτην περαιοῦνται. ἔφοδον οὖν ἰστέον τοιαύτην καθολικῶς.

γρ. ἐσχάτων.

Ἡ ἜΦΟΔΟΣ.

Δοθέντων τριῶν ὅρων, ἐν ᾗτινιοῦν σχέσει καὶ ἀναλογίᾳ, εἴτε πολλαπλασίῳ, εἴτε ἐπιμορίῳ, εἴτε ἐπιμερεῖ, εἴτε συνθέτῳ ἀπὸ τούτων ἤτοι πολλαπλασιεπιμερεῖ, μόνον ἵνα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα θεωρῆται ἐν ᾧ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, ἢ ἀνάπαλιν, ἀεὶ τὸν ἐλάττονα ἀφαίρει ἀπὸ τοῦ μέσου, ἐάν τε πρῶτος ᾖ κείμενος, ἐάν τε ἔσχατος· καὶ τίθει αὐτὸν μὲν τὸν ἐλάσσονα, πρῶτον ὅρον· τὸ δὲ λειφθὲν ἀπὸ τοῦ δευτέρου μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, δεύτερον τάσσε ὅρον· ἐκ δὲ τοιούτου πρώ-

τοῦ ὑπερέχοντος, ἐπιμερὴς ἤτοι τετράκις, ἐπίπεμπτος· ἐκ δὲ τοῦ
ἐλάττονος, πολλαπλασιεπιμόριος, ἤτοι διπλασιεπιτέταρτος.
ὡς ἐν τοῖς κε, κ, ιϛ· ἤτοι κε, με, πα· ἢ ιϛ, λϛ, πα· ἐπὶ πασῶν
δὲ τῶν διαζευχθεισῶν καὶ ἀφ' ἧς ἀμφότερα, ὁ μὲν ἔσχατος τε-
τράγωνος, ὁ αὐτὸς μένει· ὁ δὲ πρῶτος, εἰς τὸν ἐλάττονα μεταβαί-
νειν, πάντως δὲ οἱ ἄκροι τετράγωνοι. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἑτέρως ἐκ
τῶν ἐπιμερῶν, οἱ πολλαπλασιεπιμερεῖς, καὶ ἑτερομήκεις ἐπι-
μερεῖς ἀναφαίνονται· οἷον, ἐκ μὲν τοῦ δισεπιτρίτου ἀπὸ μὲν τοῦ ἐ-
λάττονος ὅρου, ἡ διπλασία, καὶ δισεπίτριτος· ἐκ δὲ τοῦ μείζο-
νος ἡ τρισεπίπεμπτος· ὡς ἐκ τοῦ θ, ιε· ἤτοι θ, κδ, ξδ· ἢ κε, ἢ
μ, ἢ ξδ. ἐκ δὲ τοῦ τρισεπιτετάρτου, ἐκ μὲν τοῦ μικροτέρου ἡ διπλα-
σία, καὶ τρισεπιτέταρτος· ἐκ δὲ τοῦ μείζονος, ἡ τετράκις ἐφέκ-
δομος· ὡς ἐπὶ τοῦ ιϛ, κη, μθ· ἤτοι ιϛ, μδ, ρκα· ἢ μθ, οζ, ρκα.

πάλιν δὲ ἐκ τοῦ ἐπιτετράκις ἐπιπέμπτου· οἷον, τοῦ πα, με,
κε, ἀπὸ μὲν τοῦ ἐλάσσονος, ἡ διπλασία· καὶ τε-
τράκις ἐπίπεμπτος, ἐν τοῖς κε. ὁ ρϟϛ.
ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος πάλιν
ἐπιμερὴς, ἡ πεντά-
κις ἐπένατος. ὡς
ἐν τοῖς πα,
με, κε,
πα, ρκϛ, ρϟϛ· καὶ κατὰ τὰ ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον
ἀνάλογα καὶ εὐάρμοστα εὑρήσεις.

ΤΕ'ΛΟΣ.

του, πενταπλάσιον εὐτάκτως καὶ ἑξῆς, μέχρις ἀεί· ἐκ δὲ αὐτῶν τούτων τῶν εὐτάκτως πολλαπλασίων ἀναγραφέντων, εὐθὺς γινῶνται φύσει τινὶ ἀναγκαίᾳ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν προσταγμάτων, οἱ ἐπιμόριοι· καὶ οὗτοι οὐχ ὡς ἔτυχεν, οὐδὲ ἀτάκτως· ἀλλὰ τῇ πρεπούσῃ ἀκολουθίᾳ. ἐκ μὲν πρώτου διπλασίου ἀναγραφέντος, ὁ ᾶ ἡμιόλιος· ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τριπλασίου, ὁ ἐν ἐκείνοις δεύτερος ἐπίτριτος· εἶτα ἐπιτέταρτος ἐκ τετραπλασίου· καὶ ἁπλῶς ἕκαστος, ἀπ' ἐκείνου ὁ παρώνυμός ἐστιν. ἀπὸ δὲ ἄλλης ἀρχῆς αὐτῶν τῶν ἐπιμορίων ἐκκειμένων ὥσπερ καὶ ἀνεφάνησαν, ἀντιστρόφως μέν τοι γινῶνται οἱ φύσει μετ' αὐτοὺς ἐπιμερεῖς· ἀπὸ μὲν τοῦ ἡμιολίου, ἐπιδιμερής· ἀπὸ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου, ἐπιτριμερής· καὶ ἐπιτετραμερής, ἐκ τοῦ ἐπιτετάρτου· καὶ ἐπ' ἄπειρον τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ. μὴ ἀναστρεφομένων δέ, ἀλλ' ὀρθῶς ἐκκειμένων τῶν εὐτάκτων ἐπιμορίων, γινῶνται διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων, οἱ πολλαπλασιεπιμόριοι· διπλασιεφημίσεις μέν, ἐκ τοῦ πρώτου ἡμιολίου· διπλασιεπίτριτος δέ, ἐκ τοῦ δευτέρου ἐπιτρίτου· διπλασιεπιτέταρτος δέ, ἐκ τοῦ δευτέρου ἐπιτετάρτου, καὶ ἀεὶ οὕτως. ἐκ δὲ τῶν διὰ ἀντιστροφῆς τῶν ἐπιμορίων γεννηθέντων, τουτέστι τῶν ἐπιμερῶν, καὶ τῶν μὴ διὰ ἀναστροφῆς, τουτέστι πολλαπλασιεπιμορίων, πάλιν τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων ἀπογεννῶνται, ὀρθῶς τε κειμένων καὶ ἀναστρεφομένων, οἱ τὰς λοιπὰς σχέσεις ἐμφαίνοντες ἀριθμοί. πάντων δὲ τῶν προειρημένων γενέσεώς τε αὐτῶν καὶ τάξεως, ὀρθότητός τε καὶ ἀναστροφῆς ὑποδείγματα ἀρκείτω ἡμῖν πρὸς ὑπόμνησιν, τὰ τοσαῦτα. Ἐκ μὲν τῆς ἐν ἡμιολίοις σχέσεως καὶ ἀναλογίας ἀνεστραμμένης ἐκ τοῦ μείζονος ὅρου, συνίσταται σχέσις ἐν ἐπιμερέσι λόγοις, ἐπιδίτριτος· ἀπὸ δὲ τοῦ ἐλάττονος κειμένης ὀρθῶς, πολλαπλασιεπιμόριος, ἤτοι διπλασιεφήμισυς· ὡς ἀπὸ τοῦ θ, ϛ, δ· ἤτοι, θ, ιε, κε· ἢ δ, ι, κε. ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτρίτοις, ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος, ἐπιτριμερής, ἤτοι τρισεπιτέταρτος· ἀπὸ δὲ τοῦ ἐλάττονος, διπλασιεπίτριτος· ὡς ἐκ τοῦ ιϛ, ιβ, θ· ἤτοι ιϛ, κη, μθ· ἢ θ, κα, μθ. ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτετάρτοις, ἀπὸ μὲν

τότητος. ἐκ δὲ τῆς ἀπτώτως ταύτης, ὀρθῶς ἡμῖν ἀποβήσονται αἱ λεγόμεναι ἠθικαὶ ἀρεταί· σωφροσύνη, ἀνδρεία, πραότης, ἐγκράτεια, καρτερία, καὶ αἱ ὅμοιαι. φέρε οὖν ἐπισκεψώμεθα ποταπὴν τὸ εἰς τὰ φυσικὰ ταῦτα συντεῖνον θεώρημα· ἔστι δὲ ἀποδεικτικὸν, τὸ ἀπὸ ἰσότητος μονωτάτης οἷον μητρὸς καὶ ῥίζης γεννᾶσθαι πάντα τὰ τῆς ἀνισότητος ποικίλα εἴδη, καὶ εἰδῶν διαφοράς. προκείσθωσαν γὰρ ἡμῖν ἐν τρισὶν ὅροις, ἴσοι τινὲς ἀριθμοί· πρῶτον μὲν, μονάδες· εἶτα δυάδες, ἐν ἄλλοις τρισίν· εἶτα τριάδες· καὶ ἑξῆς τετράδες, ἔπειτα πεντάδες· καὶ τοῦτο, μέχρις οὗ βούλει. οὕτω γὰρ τῆς τούτων ἐκθέσεως θείῳ τινὶ καὶ οὐκ ἀνθρωπίνῳ λόγῳ, ἀλλ᾽ ἀπὸ φύσεως αὐτῆς γινομένης, πρῶτοι μὲν γεννῶνται πολλαπλάσιοι· καὶ τούτων αὐτῶν ἡγήσεται μὲν, διπλάσιος· μετ᾽ αὐτὸν δὲ, τριπλάσιος· ἐπὶ δὲ τούτῳ, τετραπλάσιος· εἶτα πενταπλάσιος, καὶ κατὰ τὴν προεπιγνωσθεῖσαν ἡμῖν τάξιν ἐπ᾽ ἄπειρον. δεύτερος δὲ, ἐπιμόριος· καὶ τούτου πάλιν ἡγήσεται τὸ πρῶτον εἶδος, ἡμιόλιος· ἐπὶ τούτῳ δὲ, τὸ μετ᾽ αὐτὸ, ἐπίτριτος· ἐπὶ δὲ τούτοις, ὁ τάξει ἑξῆς ἐπιτέταρτος, καὶ ἐπίπεμπτος, καὶ ἐφεκτος· καὶ ἀνάλογον, ἐπ᾽ ἄπειρον. τρίτον δὲ, τὸ ἐπιμερὲς, καὶ πάλιν αὐτοῦ τούτου, ἐπιδιμερὲς μὲν ἡγήσεται· ἕπεται δὲ εὐθὺς ἐπὶ τούτῳ, τὸ ἐπιτριμερές· εἶτα, τὸ ἐπιτετραμερές· καὶ εὐθὺς, τὸ ἐπιπενταμερές· καὶ μέχρις ἂν προχωρῇ τις, ἀκολουθῶν τοῖς ἔμπροσθεν. προστάγματα οὖν τινὰ δεῖ ἔχειν, οἷον νόμους φυσικοὺς, ἀπαρεγκλίτους καὶ ἀπαραβάτους, οἷς πᾶσα ἡ προλεχθεῖσα πρόβασις, καὶ προχώρησις ἀπὸ τῆς ἰσότητος εὐοδώσει μὴ λειποτακτουμένη. τὰ δὲ προστάγματα, ταῦτά ἐστι· πρῶτον, πρώτῳ ἴσον ποιῆσαι· δεύτερον δὲ, πρώτῳ ἅμα καὶ δευτέρῳ· τρίτον δὲ, πρώτῳ καὶ δυσὶ δευτέροις, ἅμα καὶ τρίτῳ. γένοιτο γὰρ μετὰ τούτων τῶν νόμων πλασσοντί σοι εὐθὺς μὲν, τὰ τοῦ πολλαπλασίου ἅπαντα εἴδη τάξει, ἐκ τῶν ἐκκειμένων ὅρων ὧδε βλαστάνοντα καὶ ἐκφυόμενα· οὐ μηδὲν ἐπιτηδεύοντες, μὴ δὲ συλλαμβάνοντος· καὶ ἐκ μὲν ἰσότητος, εὐθὺς τὸ διπλάσιον· ἐκ δὲ διπλασίου, εὐθὺς τὸ τριπλάσιον· ἐκ δὲ τριπλασίου, ἑξῆς τὸ τετραπλάσιον· καὶ ἐκ τού-

των,

ΠΕΡῚ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΠΙΜΕΡΟΥ͂Σ.

Πολλαπλασιεπιμερὴς δὲ ἐστὶν ἡ λοιπὴ σχέσις τοῦ ἀριθμοῦ αὕτη τε, καὶ αἱ ἐν τῇ ὑπὸ προθέσει ἀντωνομαζόμεναι αὐτῇ, ὅταν ἀριθμὸς, τὸν συγκρινόμενον ἀριθμὸν ὅλον τε ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ πολλάκις ἢ ἅπαξ· τουτέστι δὶς ἢ τρὶς, ἢ ὁσακισοῦν. καὶ πρὸς τούτῳ μέρη τινὰ αὐτοῦ πλείονα ἑνὸς ἢ β΄, ἢ γ΄, ἢ δ΄, ἢ ε΄ καὶ ἐφεξῆς. ταῦτα δὲ οὐκ ἔστι μὲν ἡμίση, ἀλλὰ τὰ προλεχθέντα ἤτοι δὲ τρίτα, ἢ τέταρτα, ἢ πέμπτα καὶ κατὰ τὴν ὁμοίαν ἀκολουθίαν. οὐ χαλεπὸν δὲ ἐκ τῶν προφρασθέντων νοῆσαι καὶ τὰ τούτου εἴδη, ὡς ὁμοίως καὶ ἀπαραλλάκτως τοῖς πρὸ αὐτοῦ ποικίλλεται, διπλασιεπιδιμερὴς, εἶτα διπλασιεπιτριμερὴς, εἶτα διπλασιεπιτετραμερὴς, καὶ ἀνάλογον· ὁ μὲν η΄ τοῦ γ΄, διπλασιεπιδιμερής· καὶ ὁ ιϛ΄ τοῦ ϛ΄, διπλασιεπιμερής· καὶ καθόλου οἱ ἀπὸ ὀγδοάδος ὀγδοάδι διαφέροντες, τῶν ἀπὸ τριάδος, τριάδι διαφερόντων· ὁμοταγεῖς, ὁμοταγῶν· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν, δύναιτ' ἄν τις ἀκολουθῶν τοῖς προειρημένοις, εὑρίσκειν τὴν εὐταξίαν. κἀνταῦθα δὲ, ἐν τῇ ὑπὸ προθέσει νοητέον προϊοῦσαν καὶ συμμεταβαλλομένην τοῦ συγκεινομένου αὐτονομασίαν. καὶ οὕτως αἱ δέκα ἀριθμητικαὶ σχέσεις, περὶ ὧν ἡμῖν τῆς θεωρίας, ὡς ἐν πρώτῃ λαμβανομένων εἰσαγωγῇ ἐστί τις γλαφυρωτέρα ἔφοδος καὶ ἀναγκαιοτάτη πρὸς πᾶσαν τὴν τῶν ὅλων φυσιολογίαν, ἥ τις ἡμῖν σαφέστατα καὶ ἀναμφιλέκτως παρίστησιν, ὅτι πρῶτον μὲν, τὸ καλὸν καὶ ὡρισμένον καὶ ὑπὸ ἐπιστήμην πίπτον, φύσει πρεσβύτερον τοῦ ἀορίστου καὶ ἀπεριλήπτου, καὶ αἰσχροῦ· εἶτα ὅτι καὶ τὰ τοῦ ἀπείρου καὶ ἀορίστου μέρη καὶ εἴδη ὑπ' ἐκείνου μορφοῦται, καὶ περαίνεται, καὶ τοῦ προσήκοντος κόσμου καὶ εὐταξίας τυγχάνει· καὶ ὥσπερ ὑπὸ σφραγιστῆρος τινος ἢ μέτρου, πάντα τὰ ἐμπίπτοντα μεταλαμβάνει τῆς ὁμοιότητος καὶ ὁμωνυμίας. οὕτω γὰρ εὐλόγως, καὶ τὸ τῆς ψυχῆς λογικὸν, τοῦ ἀλόγου κοσμητικὸν ἔσται· καὶ ὁ θυμὸς καὶ ἡ ἐπιθυμία ἐν τοῖς ἀνίσοις δυσὶν εἴδεσι τεταγμένα, ὑπὸ τοῦ διανοητικοῦ, ἐντακτηθήσονται ὡς ὑπὸ τινος ἰσότητος, καὶ ταυ-

πάλιν ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς ἂν ἐκτεθῇ ὁ τῶν τετραπλασίων καθαρὸς στίχος, δ, η, ιβ, ις, κ, κδ, κη, λβ· εἶτα παρεκτεθῇ αὐτῷ ἐν ἄλλῳ στίχῳ, ὁ ἀπὸ τῆς ἐννάδος ἀρχόμενος, κατὰ ἐννάδος προκοπὴν συνεχὴς ἀριθμὸς, οἷον, θ, ιη, κζ, λς, με, νδ, ἐξομεν αὖ ἀφαινόμενον πάλιν τὸ ἰδικὸν πολλαπλασιεπιμόριον, τουτέστι τὸ διπλασιεπιτέταρτον εὔτακτον· καὶ τοῦτο ἐπινοεῖν πάρεστι τῷ βουλομένῳ, μέχρις ἀπείρου· τὸ δὲ ἕτερον εἶδος, ἄρχεται ἀπὸ
† τοῦ τριπλασιεφημιμέρους· οἷον, ὁ ζ πρὸς τὸν ιβ, † πρὸς τὸν β· καὶ ὁ ιδ πρὸς τὸν δ· καὶ ἁπλῶς, οἱ καθ' ἑβδομάδα προχωροῦντες πρὸς τοὺς ἀπὸ δυάδος εὐτάκτους ἀρτίους· εἶτα πάλιν ἐξ ὑπαρχῆς, ὁ ι πρὸς τὸν γ, τριπλασιεπίτριτος· καὶ ἁπλῶς οἱ δεκαπλάσιοι ἐφεξῆς, πρὸς τοὺς ἐφεξῆς διπλασίους, ἃ δὴ ἀκριβέστερον καταπδεῖν δυνάμεθα, καὶ τρανότερον, ἐν τῷ προεπιγνωσθέντι διαγράμματι. πρὸς μὲν γὰρ τὸν πρῶτον στίχον, οἱ ἐφεξῆς τάξει συγκείμενοι ὅλοι πρὸς ὅλον, τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὔτακτα εἴδη, ἕως ἄπειρον ὑποδεικνύουσι. πρὸς αὐτὸν ἀεὶ πρῶτον ἅπαντες συγκρινόμενοι· πρὸς δὲ τοὺς ὑποκάτω πάντας ἐφεξῆς εἷς ἕκαστος πρὸς τὸν γείτονα τῆς ἀρχῆς ἡμῖν ἀπὸ τοῦ δευτέρου γινομένου στίχου, πάντα τὰ τοῦ ἐπιμορίου εἴδη, κατὰ τὴν οἰκείαν εὐταξίαν κινεῖται· ἀπὸ δὲ τοῦ τρίτου στίχου πρὸς αὐτόν π καὶ τοὺς συνεχεῖς αὐτῷ καθέκαστον οἱ ἀπὸ τοῦ πέμπτου ὑποτεταγεῖς πάντες ἀντεξεταζόμενοι, τὰ τοῦ ἐπιμεροῦς πάντα εἴδη εὔτακτα ὑποδείξουσι· τῶν δὲ πολλαπλασιεπιμορίου αἱ συγκρίσεις, τάξιν φυσικὴν καὶ ἰδίαν ἕξουσιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δευτέρου στίχου ἀρχόμενοι, τοὺς ἀπὸ τοῦ πέμπτου συγκρίνωμεν ἀριθμοὺς, πρῶτον πρὸς πρῶτον· καὶ δεύτερον, πρὸς δεύτερον· καὶ τρίτον, πρὸς τρίτον· καὶ οὕτως ἑξῆς. πρὸς δὲ τὸν τρίτον, τοὺς ἀπὸ τοῦ ἑβδόμου· πρὸς δὲ τὸν τέταρτον, τοὺς ἀπὸ τοῦ θ· καὶ κατὰ τὴν ἁρμόζουσαν εὐταξίαν μέχρις ἂν ἐθέλῃ τις παρεκτείνεσθαι. δῆλον δὲ ὅτι οἱ ἐλάττονες, σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει, ἀντονομάζονται καὶ ἐνθάδε πρὸς τοὺς μείζονας, κατὰ τὰς ἐγκειμένας πᾶσι προσηγορίας.

ὑπὲρ

πλάσιον, ἢ πενταπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς· κατὰ δὲ τὸ δεύτερον, ἀπὸ τοῦ ἐπιμορίου γενικῶς εἰδικὰ εὔτακτα, τὸ ἐφημιόλιον, τὸ ἐπίτριτον, τὸ ἐπιτέταρτον, τὸ ἐπίπεμπτον, καὶ ἐφεξῆς· ὥστε τὴν σύνθεσιν τοιαύτῃ τινὶ τάξει προχωρεῖν, διπλασιεπίεκτος, καὶ ἀνάλογον· καὶ ἀπ᾽ ἄλλης ἀρχῆς, τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος, τριπλασιεπίπεμπτος· καὶ πάλιν ἄνωθεν, τετραπλασιεφήμισυς, τετραπλασιεπίτριτος, τετραπλασιεπιτέταρτος, τετραπλασιεπίπεμπτος· καὶ πάλιν ἄνωθεν, πενταπλασιεφήμισυς, πενταπλασιεπίτριτος, πενταπλασιεπιτέταρτος, πενταπλασιεπίπεμπτος· καὶ τὰ ἐπὶ τούτοις ἐπ᾽ ἄπειρον ἀναλογοῦντα. ὁσάκις μὲν γὰρ ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα ὅλον ἐν ἑαυτῷ ἔχει, παρὰ τὴν τοσαύτην ποσότητα, παρονομάζεται τὸ πρότερον μέρος τοῦ λόγου τῶν συμπλεκομένων ἐν τῷ πολλαπλασιεπιμορίῳ· οἷον δ᾽ ἂν τὸ μόριον τὸ πρὸς τῷ πολλάκις ὅλῳ ἐνυπάρχον ἐν τῷ μείζονι, ἢ πρὸς ἐκεῖνο παρώνυμον ἔσται τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ λόγου, ἀφ᾽ οὗ σύνθετον τὸ πολλαπλασιεπιμόριον· ὑποδείγματα δὲ αὐτοῦ, ὁ μὲν ε τοῦ δύο διπλασιεφημιόλιος· ὁ δὲ ζ, τοῦ γ, διπλασιεπίτριτος· ὁ δὲ θ, τοῦ δ, διπλασιεπιτέταρτος· ὁ δὲ ια, τοῦ ε, διπλασιεπίπεμπτος· καὶ ἀεὶ οὕτως εὐτάκτους αὐτῶν γεννήσεις, συγκρίνων τοῖς ἀπὸ δυάδος ἑξῆς ἀρτίοις, καὶ περιττοῖς τοὺς ἀπὸ πεντάδος καθαροὺς περιττούς, πρῶτον, πρώτῳ· δεύτερον, δευτέρῳ· τρίτον, τρίτῳ· καὶ τοὺς ἄλλους ὁμοταγεῖς τοῖς ὁμοταγέσιν· ἀπὸ δυάδος δὲ τῶν ἐφεξῆς πάντων ἀρτίων, οἱ ἀπὸ πεντάδος, συνεχεῖς πεντάδι διαφέροντες, διπλασιεφημιόλιοι καθαροὶ ἔσονται, ὁμοταγεῖς ὁμοταγῶν· ἀπὸ δὲ τοῦ τρίτου, πάντων τῶν τριάδι διαφερόντων ἐκτεθέντων· οἷον, γ, ϛ, θ, ιβ, ιε, ιη, κα· καὶ ἐν ἄλλῳ στίχῳ, τῶν ἀπὸ ἑβδομάδος ἑβδομάδι διαφερόντων ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκτεθέντων, οἷον, ζ, ιδ, κα, κη, λε, μβ, μθ· τῶν συγκρινομένων μειζόνων ἐλάττοσι· πρώτου, πρώτῳ· δευτέρου, δευτέρῳ· τρίτου, τρίτῳ· τετάρτου, τετάρτῳ· καὶ ἐφεξῆς, τὸ δεύτερον εἶδος ἀναφαίνεται τὸ τῶν διπλασιεπιτρίτων, μετὰ τῆς οἰκείας εὐταξίας ἐκκείμενον. εἶτα

ρὲς, καὶ ἐπιτριμερὲς, καὶ ἐπιτετραμερὲς, καὶ ἐφεξῆς ἐπιπλεῖον παραπλησίως. μετὰ γὰρ τῶν πυθμένων ἑκάστου, γεννῶνται οἱ συνεχεῖς διπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων, ἢ τριπλασιαζομένων· ἢ ὅλως κατὰ τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὐτάκτως ἀεὶ μεγεθυνομένων. προσέχειν δὲ, ὅτι ἐκ μὲν τῶν δύο μερῶν πρὸς τοῦ ὅλῳ ἐνόντων τοῦ μείζονι, τὸ τρίτον ὑπακούεται· ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν, τὸ τέταρτον· ἐπὶ δὲ τῶν τεσσάρων, τὸ πέμπτον· ἐπὶ δὲ τῶν πέντε, τὸ ἕκτον· καὶ ἀεὶ οὕτως, ἵνα ἡ πρόβασις κατὰ τὴν ὀνομασίαν τοιαύτη τις ᾖ· ἐπιδίτριτος, ἐπιτετράπεμπτος, εἶτα ἐπιπεντάεκτος· καὶ παραπλησίως ἐπὶ τῶν λοιπῶν. αἱ μὲν οὖν τῷ πρός τι ποσοῦ ἁπλαῖ σχέσεις καὶ ἀσύνθετοι, αἱ δὲ εἰσιν αἱ προλεχθεῖσαι· αἱ δὲ σύνθετοι ἐξ αὐτῶν, καὶ οἷον συμπλακεῖσαι ἐκ δυοῖν εἰς μίαν, εἰσὶν αἵδε· ὧν πρόλογοι μὲν, πολλαπλασιεπιμόριος, καὶ πολλαπλασιεπιμερής· ὑπόλογοι δὲ, αἱ εὐθὺς ἑκατέρῳ τούτων συνυφιστάμεναι, σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ὀνομαζόμεναι· πολλαπλασιεπιμορίῳ μὲν, ὑποπολλαπλασιεπιμόριος· πολλαπλασιεπιμερεῖ δὲ, ὑποπολλαπλασιεπιμερής· καὶ καθ' ὑποδιαίρεσιν τῶν γενῶν, αἱ εἰδικαὶ, ταῖς εἰδικαῖς ἀνθυπακούονται, μετὰ τῆς ὑπὸ προθέσεως καὶ αὗται ὀνομαζόμεναι.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΕΠΙΜΟΡΙΟΥ.

Πολλαπλασιεπιμόριος μὲν οὖν ἐστι σχέσις τις, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὁ μείζων, πολλάκις ἢ ἅπαξ ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάσσονα, καὶ πρὸς τούτῳ μόριον τι ἓν αὐτοῦ· δίς ποτε, διττῶς δὲ ὡς ἂν σύνθετος ὁ τοιοῦτος τρόπος ποικίλλεται, κατὰ τὴν τῶν συμπλεκομένων ὀνομάτων καθ' ἑκάτερον ἰδιότητα. ἐπεὶ γὰρ ὁ πολλαπλασιεπιμόριος ἔκ τε τοῦ πολλαπλασίου καὶ τοῦ ἐπιμορίου γενικῶς σύγκειται, ἕξει ἐν ταῖς εἰδικαῖς ὑποδιαιρέσεσι, ποικιλίαν τινὰ καὶ ἐξαλλαγὴν ἰδίαν μὲν, κατὰ τὸ πρότερον μέρος τοῦ ὀνόματος· ἰδίαν δὲ, κατὰ τὸ δεύτερον· ἔστι κατὰ μὲν τὸ πρότερον τὸ τοῦ πολλαπλασίου, ὃ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἢ τετραπλάσιον,

νον ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ τὸν ὅλον, καὶ προσέτι μέρη αὐτοῦ πλείονα ἑνός· τὰ δὲ πλείονα ἑνός, ἄρχεται πάλιν ἀπὸ τοῦ δύο, καὶ πρόεισιν ἐπὶ πάντας τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμούς· ὥστε τοῦ ἐπιμεροῦς πυθμὴν ἔσται εἰκότως, ὁ πρὸς τὸν ὅλον, δύο μέρη τοῦ ἀντισυγκρινομένου ἔχων· καὶ κληθήσεται, ἐπιδιμερὴς εἰδικῶς· μετὰ δὲ τοῦτον, ὁ τρία πρὸς τὸν ὅλον ἔχων, κληθήσεται ἐπιτριμερὴς εἰδικῶς· καὶ μετὰ τοῦτον ἐπιτετραμερής, εἶτα ἐπιπενταμερής· καὶ οὕτως ἀεί. τὰ δὲ μέρη ῥίζαν ἔχει καὶ ἀρχὴν ἀπὸ τοῦ τρίτου· ἀδύνατον γὰρ ἐνθάδε ἀπὸ τοῦ ἡμίσυ ἄρχεσθαι. ἂν δὲ γὰρ καί τινα ὑποθώμεθα δύο ἡμίση ἔχειν τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τὸν ὅλον, λήσομεν ἑαυτούς, πολλαπλάσιον ἀντὶ ἐπιμεροῦς τιθέντες. ἕκαστον γὰρ ὅλον καὶ δύο ἡμίση αὐτὸν συντιθέμενα διπλάσιον γίνεται τοῦ ἐξ ἀρχῆς· ὥστε ἂν ἀναγκαιότατον ἀπὸ δύο τρίτων ἄρχεσθαι· εἶτα δύο, πέμπτων· εἶτα δύο, ἑβδόμων· καὶ ἐπὶ τούτοις δύο, ἐνάτων, κατὰ τὴν τῶν περισσῶν πρόβλησιν. τὰ γὰρ δʹ, ὅτε παραλόγου χάριν, πάλιν ἥμισύ ἐστι· καὶ τὰ δύο ἕκτα, τρίτον· καὶ οὕτω πάλιν ἐπιμόριον ἀντὶ ἐπιμερῶν γενήσονται· ὅπερ οὐ πρόκειται οὐδ' ἡμῖν, οὔτε τῇ τῆς τεχνολογίας καταλληλίᾳ. μετὰ δὲ τὸν ἐπιμερῆ εὐθὺς συνίσταται ὁ ἐπιτριμερής, ὅταν ἀριθμὸς ἐν τῷ συγκρινομένῳ ὅλος ἔχηται αὐτός τε, καὶ προσέτι πλείονα αὐτοῦ μέρη, ἢ βʹ, ἢ γʹ, ἢ δʹ, ἢ εʹ, καὶ ἐφεξῆς.

Περὶ γενέσεως ἐπιμερῶν τε καὶ ὑπεπιμερῶν.

τάξις δὲ ἀμφοτέρων καὶ ἀκόλουθος γένεσις εὑρίσκεται, ὅταν ἐκτεθέμενοι τοὺς ἀπὸ τριάδος ἑξῆς ἀρτίους καὶ περιττοὺς ἀριθμούς, πρὸς τούτους συγκρινομένους τοὺς ἀπὸ πεντάδος καθαρούς, συνεχεῖς περισσοὺς μόνους, πρῶτον πρὸς πρῶτον· ὅδε, τὸν ε, πρὸς τὸν γ· καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον· οἷον, τὸν ζ, πρὸς τὸν δ· καὶ τρίτον, πρὸς τρίτον· ὅδε, τὸν θ πρὸς τὸν ε· καὶ τέταρτον πρὸς τέταρτον· ὅδε, τὸν ια πρὸς τὸν ϛ· καὶ ἐφεξῆς τῇ αὐτῇ τάξει, ἐφ' ὅσον οὖν. οὕτως γὰρ εὔτακτα τὰ τοῦ ἐπιμεροῦς εἴδη, κατὰ τοὺς ἑκάστου πυθμένας διαλαμβάνονται· ἐπιδιμερές, πρῶτον· εἶτα, ἐπιτριμερές,

δεύτερον εἶδος, ἴσῃ τινὶ καὶ ὁμοίᾳ προκοπῇ προχωροῦσιν ἀπὸ τοῦ τετάρτου πρὸς τὸν τρία, καὶ ὀκτὼ πρὸς τὸν ἕξ, καὶ ιβ πρὸς τὸν θ, καὶ ιϛ πρὸς τὸν ιβ· καὶ ἀκολούθως ἴσην καὶ τὴν τῶν διαφορῶν αὔξησιν λαμβανόντων· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σχέσεων πολλαπλασίου τε καὶ ἐπιμορίου, σύμφωνα τὰ ἀποτελέσματα, καὶ ἰσοδυναμῶς ἐκτιθούμενα προβαίνων ἐπ' ἄπειρον ὄψει· κἀκεῖνο δὲ οὐκ ἐλάττονος ἀκριβείας τέτυχεν ἐν τῷ διαγράμματι. ἐπιγώνιοι μὲν γὰρ αὐτῶν εἰσι μονάδες· ἡ μὲν, κατ' ἀρχὴν ἁπλῆ· ἡ δὲ, ἐπὶ τέλει τετραδουμένη· δευτερωδούμεναι δὲ ἐν διαφορήσει, αἱ δύο λοιπαί· ὥστε ἀποτελεῖν τὸ ὑπὸ, ἴσον τῷ ἀπό. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρωθεν, ἴση πρόβασις εἰς τὰς δεκάδας ἀπὸ μονάδος· καὶ πάλιν ἀντιθέτως αἱ ἀπὸ δεκάδος προχωρήσεις εἰς ἑκατοντάδα· καὶ οἱ μὲν διαγώνιοι πάντες ἀριθμοί, ἀπὸ μονάδος εἰς ἑκατοντάδα τετράγωνοι ἰσάκις ἴσως μηκυνθέντες. οἱ δὲ ἑκατέρωθεν παραπαίζοντες αὐτοὺς, ἑτερομήκεις πάντως ἄνισοι, καὶ μονάδι μείζοσιν ἀλλήλων πλευραῖς μηκυνθέντες· ὥστε ἅπαξ δύο ἐφεξῆς τετραγώνων· καὶ δὶς τοῦ ἀνὰ μέσον αὐτῶν ἑτερομήκους, τετράγωνον πάντως ἀποτελεῖσθαι. καὶ ἀνάπαλιν· ἐξ ἅπαξ δύο παρακειμένων ἑτερομηκῶν, καὶ δὶς τοῦ ἀνὰ μέσον αὐτῶν τετραγώνου, τετράγωνον πάντως ἀποτελεῖσθαι· καὶ ἕτερα πολλὰ τοιαῦτα φιλοτιμούμενος εὕροις ἄν, τερπνὰ ἐμφαινόμενα τῷ δὲ τῷ διαγράμματι· περὶ ὧν οὐ καιρὸς νῦν μηκύνειν. οὔπω γὰρ τὴν ἐπίγνωσιν αὐτῶν ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς εἰλήφαμεν· ὥστε ἐπὶ τὰ ἑξῆς τρεπτέον. μετὰ γὰρ τὰς δύο ταύτας γενικὰς σχέσεις, πολλαπλάσιον καὶ ἐπιμόριον, καὶ τὰς ἀντιθέτους αὐταῖς σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ἐκφερομένας ἄλλας δύο, ὑποπολλαπλάσιόν τε καὶ ὑπεπιμόριον εἰσίν. ἐν μὲν τῷ μείζονι τοῦ ἀνίσου μέρει, ἡ ἐπιμερής· ἐν δὲ τῷ ἐλάττονι, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ὑπεπιμερής.

ΠΕΡΙ ἘΠΙΜΕΡΟΥΣ.

Ἔστι δὲ ἐπιμερὴς μὲν σχέσις, ὅταν ἀριθμὸς τὸν συγκρινόμε-

νον

τερα καὶ οὗτοι καμμοειδῶς ἀπὸ τετράδος ἀρχόμενοι, πολλαπλάσιοί εἰσι κατὰ πρῶτον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου. διπλάσιοι γάρ, καὶ ὁ μὲν πρῶτος, τοῦ πρώτου μονάδι διαφέρων· ὁ δεύτερος τοῦ δευτέρου, δυάδι· καὶ ὁ τρίτος τοῦ τρίτου, τριάδι· καὶ τετράδι, ὁ συνεχής· καὶ πεντάδι, οἱ μετ' αὐτούς· καὶ οὕτω μέχρις ὅλου ἀκόλουθον εὑρήσεις. οἱ δὲ τρίτοι ἐφ' ἑκάτερα ἀπὸ ἐννάδος κοινῆς ἀρχόμενοι, τῶν ἐν τῷ πρώτῳ στίχῳ κατὰ τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου τριπλάσιοι ἔσονται, συνεξεταζομένων αὐτοῖς καὶ τῶν εἰς τριάδα ἑκατέρωθεν χιασμῶν: συμπλέκεται δὲ καὶ ἡ διαφορὰ τούτοις κατὰ τὴν τῶν ἀρτίων φύσιν· τῷ μὲν πρώτῳ, δυὰς οὖσα· τῷ δὲ ἐφεξῆς, τετράς· τῷ δὲ τρίτῳ, ἑξάς. ἣν καὶ διαφορὰν αὐτομάτως ἡμῖν ἡ φύσις ἐμεσεμβόλησε, μεταξὺ τούτων τῶν ἐξεταζομένων, ὡς ἐν τῷ διαγράμματι φαίνεται. ὁ δὲ τέταρτος στίχος, οὗ κοινὴ μὲν ἀρχὴ ἐφ' ἑκάτερα ὁ ιϛ· οἱ δὲ χιασμοὶ περαιοῦνται εἰς τὰς τετράδας, τὸ τρίτον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου δεικνύντων, τουτέστι τὸ τετραπλάσιον, πρὸς τὸν αὐτὸν ἐξεταζόμενοι πρῶτον στίχον ὁμοταγῶς, πρῶτον μὲν ἀριθμόν, πρὸς πρῶτον· δεύτερον δέ, πρὸς δεύτερον· καὶ τρίτον, πρὸς τρίτον· καὶ ἐφεξῆς. πάλιν δὲ αἱ τούτων διαφοραί, τριάς, ἑξάς, εἶτα ἐννεάς, εἶτα δωδεκάς, καὶ αἱ κατὰ τριάδος πρόσθεσιν ποσότητες, καὶ αὗται ἐν τῷ τοῦ διαγράμματος ὕφει πεφώρανται, τάξει ἐγκείμεναι ὑπὲρ αὐτοὺς τοὺς τετραπλασίους καὶ ἐπὶ τῶν ἀκολούθων τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, τὸ ἀνάλογον μέχρι παντὸς προχωρήσει. πρὸς δὲ τὸν ἐφ' ἑκάτερα δεύτερον στίχον, ἀπὸ μὲν κοινῆς ἀρχῆς τοῦ δ ἀρχόμενον, ὑποδεκπίπτοντα δὲ κατὰ χιασμὸν εἰς τὴν ἰδίαν ἑκατέρων δυάδα, οἱ ὑποβεβηκότες τάξει στίχοι, τοῦ ἐπιμορίου τὸ πρῶτον εἶδος παρεμφαίνουσι, τουτέστι τὸ ἡμιόλιον, ὁμοταγεῖς πρὸς ὁμοταγεῖς, οὕτω φύσει θείᾳ καὶ οὐ νόμῳ ἡμετέρῳ, ὧν δὲ συνθήματα, μεταγενέστεροι τῶν πολλαπλασίων οἱ ἐπιμόριοι· οἷον, ὁ μὲν γ τοῦ β· ὁ δὲ ϛ, τοῦ δ· ὁ θ, τοῦ ϛ· ὁ ιβ, τοῦ η· ὁ ιε, τοῦ ι· καὶ μέχρι παντός. διαφορὰν δέ, καὶ οὗτοι ἔχουσι, τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς ἀριθμούς, ὡς οἱ πρὸ αὐτῶν. Ἐπὶ τούτοις δὲ τὸ τοῦ ἐπιμορίου

ἔτι γε μὴν καὶ τὸ μόριον οὗ παρώνυμός ἐστιν ἕκαστος τῶν ἐπιμορίων, ἐν τοῖς ἥσσοσι θεωρεῖται τῶν ὅρων· ἐν δὲ τοῖς μείζοσιν, οὐδαμῶς. Ἔτι δὲ, φυσικῶς καὶ οὐχ ἡμῶν θεμένων, ἀρχηγονώτερον τὸ πολλαπλάσιον καὶ πρεσβύτερον τοῦ ἐπιμορίου, καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς μὲν, ποικιλώτερον εἰσόμεθα, ὅσον οὔπω. κἀνταῦθα δὲ πρὸς ἁπλῆν ἔμφασιν προχειριστέον κατ' εὐτάκτους καὶ παραλλήλους στίχους τοὺς προφραχθέντας ἡμῖν πολλαπλασίους εἰδικῶς· πρώτους μὲν διπλάσιον ἐν ἑνὶ στίχῳ· εἶτα, ἐν δευτέρῳ, τριπλάσιον· εἶτα τετραπλάσιον, ἐν τρίτῳ· καὶ μέχρι δεκαπλασίων· ἵνα καὶ τάξιν καὶ ποικιλίαν αὐτὴν καὶ πρόβασιν ἔπεχον, καὶ ὅτι πρότερον φύσει καταλάβωμεν, καὶ δὴ καὶ ἕτερα ἄττα τερπνὰ καὶ γλαφυρὰ παρακολουθήματα. ἔστω δὲ τὸ διάγραμμα, τοιοῦτον.

μῆκος

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι
β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη	κ
γ	ς	θ	ιβ	ιε	ιη	κα	κδ	κζ	λ
δ	η	ιβ	ις	κ	κδ	κη	λβ	λς	μ
ι	ε	ιε	κ	κε	λ	λε	μ	με	ν
ς	ιβ	ιη	κδ	λ	λς	μβ	μη	νδ	ξ
ζ	ιδ	κα	κη	λε	μβ	μθ	νς	ξγ	ο
η	ις	κδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ	π
θ	ιη	κζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα	ϟ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ	ρ

βάθος βάθος

μῆκος

Ἐκκείσθω ἐν μὲν τῷ πρώτῳ στίχῳ ἀπὸ μονάδος, φυσικοὶ ἀριθμοὶ· εἶτα ἑξῆς ἐν κύκλῳ μετὰ τὴν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν· οὐκοῦν τῶν μὲν πρώτων στίχων ἀρξαμένων ἀπὸ μονάδος ἐπὶ πλάτος καὶ ἐπὶ βάθος γαμμοειδῶς, οἱ δεύτεροι ἐφ' ἑκάτερα

ΠΕΡῚ ἘΠΙΜΟΡΊΟΥ

Ἐπιμόριος δέ ἐστιν ἀριθμός, ὁ τοῦ μείζονος δεύτερον τῇ φύσει καὶ τῇ τάξει εἶδος, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸν συγκρινόμενον ὅλον καὶ μόριον αὐτοῦ ἕν τι· ἀλλ' ἐὰν μὲν ἥμισυ ᾖ τὸ μόριον, καλεῖται ἡμιόλιος εἰδικῶς, ὁ τῶν συγκρινομένων μείζων· ὑφημιόλιος δέ, ὁ ἐλάσσων. ἐὰν δὲ τρίτον, ἐπίτριτός τε καὶ ὑπεπίτριτος· καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρι παντὸς προχωροῦντι συμφωνήσει σοι ὥς τε καὶ ταῦτα ἐπ' ἄπειρον τὰ εἴδη πρόεισι, καίτοι ἀπείρου τινὸς εἴδη ὄντα γένους. τὸ μὲν γὰρ πρῶτον αὐτῶν τὸ ἡμιόλιον, συμβαίνει τοὺς μὲν ὑπολόγους ἔχειν, τοὺς ἀπὸ δυάδος ἐφεξῆς ἀρτίους, ἄλλον δὲ οὐδαμῶς οὐδένα· τοὺς δὲ προλόγους, τοὺς ἀπὸ τριάδος, ἐφεξῆς τριπλασίους, ἄλλον δὲ οὐδένα· συζευκτέον δὲ αὐτοὺς εὐτάκτως· πρῶτον, πρώτῳ· δεύτερον, δευτέρῳ· τρίτον, γ· τὸν γ, τῷ δύο· τὸν ς, τῷ δ· τὸν θ, τῷ ς· τὸν ιβ, τῷ η· καὶ τοὺς ἀναλόγους τοῖς ὁμοταγέσιν. ἐὰν δὲ ἐπισκέψασθαι θέλωμεν τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ ἐπιμορίου, τουτέστι τὸ ἐπίτριτον (συνεχὲς γὰρ μέρος αὐτοῦ φυσικῶς μετὰ τὸ ἥμισυ ὑπάρχει τὸ τρίτον) ὅρον μὲν αὐτοῦ ἕξομεν τοῦτον, ἀριθμός, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ ὅλον τε τὸν συγκρινόμενον, καὶ μέρος αὐτοῦ τρίτον πρὸς τῷ ὅλῳ· παραδείγματα δὲ αὐτοῦ εὔτακτα ληφθήσεται ἡμῖν, οἱ ἀπὸ τετράδος συνεχεῖς τετραπλάσιοι, συνεζευγμένοι τοῖς ἀπὸ τριάδος τριπλασίοις, ὁμοταγεῖς ὁμοταγέσιν· οἷον ὁ δ, τῷ γ· ὁ η, τῷ ς· ὁ ιβ, τῷ θ· καὶ κατὰ ταῦτα ἐφ' ὅσον οὖν· δῆλον δὲ ὅτι ὁ ἀνθυπακούων τῷ ἐπιτρίτῳ, λεγόμενος δὲ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει, ὑπεπίτριτός ἐστιν, ὁ ἐμπεριεχόμενος ἐκείνῳ ὅλος τε, καὶ πρός τι ἑαυτοῦ τρίτον. ὡς ὁ μὲν γ, τῷ δ· ὁ δὲ ς, τῷ η· ὁ δὲ θ, τῷ ιβ· καὶ οἱ ἀκόλουθοι τῶν ὁμοταγῶν. παρατηρητέον δὲ τὸ παρεπόμενον πᾶσι τούτοις γλαφυρόν, ὅτι οἱ μὲν πρῶτοι καὶ πυθμένες λεγόμενοι, ἐγγύς εἰσιν ἀλλήλων ἐν τῷ φυσικῷ χύματι· οἱ δὲ δεύτεροι ἀπὸ πυθμένων, ἕνα μόνον ἀριθμὸν διαλείπουσιν· οἱ δὲ τρίτοι, δύο· οἱ δὲ τέταρτοι, τρεῖς· καὶ οἱ πέμπτοι, δ· καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρις οὗ βούλει.

καὶ ἔστιν ἀριθμὸς, ὁ ἐπειδὰν μείζοσι συγκρίνηται, δυνάμενος μετρεῖν αὐτὸν, πληρούντως πλεονάκις ἢ ἅπαξ· τὸ δὲ πλεονάκις ἢ ἅπαξ, ἀπὸ τοῦ δὶς ἄρχεται, καὶ ἐπ' ἄπειρον πρόεισιν. ἐὰν μὲν οὖν δὶς μόνον μετρῇ τὸν ᾧ συγκρίνεται μείζονα, ὑποδιπλάσιος λέγεται ἰδίως, ὥσπερ τὸ ἓν τῶν δύο· ἐὰν δὲ τρίς, ὑποτριπλάσιος, ὥσπερ τῶν τριῶν τὸ ἕν. ἐὰν δὲ τετράκις, ὑποτετραπλάσιος, ὥσπερ τὸ αὐτὸ ἓν, τοῦ δ'· καὶ ἐφεξῆς οὕτως· γενικῶς δὲ ἀπείρου ὑπάρχοντος ἑκατέρου τοῦ τε πολλαπλασίου, καὶ τοῦ ὑποπολλαπλασίου, ἔτι καὶ αἱ καθ' ὑποδιαίρεσιν διαφοραὶ καὶ τὰ εἴδη, ἐπ' ἄπειρον φύσει προϊόντα θεωρεῖται. τὸν γὰρ διπλάσιον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ δύο, διὰ πάντων ἀρτίων πρόεισιν, ἕνα παρ' ἕνα λαμβανόντων ἡμῶν, ἀπὸ τοῦ φύσει χύματος. ἐν συγκεῖται δὲ, οὗτοι διπλάσιοι λεχθήσονται, πρὸς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς κειμένους ἀρτίους τε καὶ περισσούς· τριπλάσιοι δὲ πάντες εἰσὶν, οἱ ἀπ' ἀρχῆς δύο παραλειπομένων ἐκλεγόμενοι τρίτοι τῇ τάξει· οἷον, γ, ς, θ, ιβ, ιε, ιη, κα, κδ. οἷς συμβέβηκεν, ἕνα παρ' ἕνα ἀρτίοις τε καὶ περισσοῖς εἶναι· καὶ αὐτοὶ δὲ, ἐν τῷ ἀπὸ μονάδος ἀριθμῷ, εὐτάκτῳ τῶν ἐφεξῆς πάντων, τριπλάσιοι προχωροῦντες ἐφ' ὅσον βούλονταί τις παρακολουθεῖν· τετραπλάσιοι δὲ εἰσὶν, οἱ τριῶν παραλειπομένων, πάντη τέταρτοι· οἷον δ, η, ιβ, ις, κ, κδ λβ· καὶ ἐφεξῆς. καὶ οὗτοι δὲ, τῶν ἀπὸ μονάδος εὐτάκτως τετραπλάσιοί εἰσιν προϊόντες ἐφ' ὅσον ἂν εὐθύνῃ τις ἕπεσθαι. συμβέβηκε δὲ καὶ τούτοις, πάντας εἶναι ἀρτίους· ἕνα γὰρ παρ' ἕνα μόνον παραλειπτέον ἐξ αὐτῶν, τῶν ἄνωθεν διακεκριμένων ἀρτίων· ὥστε ἀναγκαίως ὑπάρχειν τοῖς ἁπλῶς ἀρτίοις· διπλασίοις μὲν, ἅπασι· τετραπλασίοις δὲ, ἕνα παρ' ἕνα· ὥσπερ ἑξαπλασίοις, ἕνα παρὰ δύο· καὶ ὀκταπλάσιοι, ἕνα παρὰ τρεῖς. καὶ ἐπ' ἄπειρον οὕτως ἀνάλογον ἡ προκοπή. πενταπλάσιοι δὲ ἐφθήσονται, οἱ τέτταρσι μὲν, παραλείποντες πέμπτοι δὲ, τεταγμένοι ἀπ' ἀλλήλων· καὶ αὐτοὶ δὲ, τῶν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς τεταγμένων ἀριθμῶν πενταπλάσιοι· καὶ εἷς παρ' ἕνα περισσὸς καὶ ἄρτιος, κατὰ τὴν αὐτὴν τῶν τριπλασίων τάξιν.

περὶ

καὶ ἀδιαίρετος, ὡς ἂν ἀρχικωτάτη· διαφορὰν γὰρ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται. ἓν γάρ ἐστι τοῦ ἴσου τὸ μὲν τοιόνδε, τὸ δὲ τοιόνδε· ἀλλ' ἀεὶ τρόπῳ καὶ τῷ αὐτῷ, τὸ ἴσον ἐστίν. ἀμέλει καὶ τὸ ἀνθυπακοῦον τῷ ἴσῳ, οὐχ ἑτερωνυμεῖ πρὸς αὐτὸ, ἀλλὰ συνωνυμεῖ, ὥσπερ φίλος, γείτων, συστρατιώτης, οὕτω δὴ καὶ ἴσος· ἴσῳ γάρ ἐστιν ἴσος. τὸ δὲ ἄνισον, καὶ αὐτὸ καθ' ὑποδιαίρεσιν σχίζεται· καὶ ἔστιν αὐτοῦ, τὸ μὲν μεῖζον, τὸ δὲ ἔλαττον, ἀντωνυμούμενά τε καὶ ἀντίθετα ἀλλήλοις κατὰ ποσότητα καὶ σχέσιν αὐτήν. τὸ μὲν γὰρ μεῖζον, ἑτέρου τινὸς μεῖζον· τὸ δὲ ἔλαττον, ἔμπαλιν ἑτέρου τινὸς ἔλαττον, ἐν συγκρίσει· καὶ τὰ ὀνόματα, οὐ τὰ αὐτὰ, ἀλλὰ διαφέροντα ἑκάτερα ἔχει, ὡς πατὴρ καὶ υἱὸς καὶ τύπτων, καὶ τυπτόμενος· καὶ διδάσκων ἢ μανθάνων· ἢ τὰ ὅμοια. τοῦ μὲν οὖν μείζονος καθ' ὑποδιαίρεσιν δευτέραν εἰς πέντε εἴδη διαιρουμένου, τὸ μέν ἐστι, πολλαπλάσιον· τὸ δὲ, ἐπιμόριον· τὸ δὲ, ἐπιμερές· τὸ δὲ, πολλαπλασιεπιμόριον· τὸ δὲ, πολλαπλασιεπιμερές. καὶ τοῦ ἀντιθέτου δὲ τούτῳ, τουτέστι τοῦ ἐλάττονος, πέντε εἴδη ὁμοίως καθ' ὑποδιαίρεσιν συνίσταται, ἀντικείμενα τοῖς προειρημένοις τοῦ μείζονος πέντε εἴδεσιν· ὡς ὅλον ὅλῳ, τὸ ἔλαττον τῷ μείζονι· οὕτω καὶ ἕκαστον ἑκάστῳ τῇ προλεχθείσῃ τάξει μετὰ τῆς ὑπὸ προθέσεως ἀντιδιαστελλόμενα· ὑποπολλαπλάσιον, ὑπεπιμόριον, ὑπεπιμερὲς, ὑποπολλαπλασιεπιμόριον, καὶ ὑποπολλαπλασιεπιμερές. Ἄνωθεν οὖν πολλαπλάσιόν ἐστιν εἶδος τοῦ μείζονος, πρῶτον καὶ πρεσβύτερον φύσει, ὡς εὐθὺς εἰσόμεθα, ἀριθμὸς ὁ ἐπειδὰν ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρεῖται ἔχων αὐτὸν ἐν ἑαυτῷ ὅλον πλεονάκις ἢ ἅπαξ· οἷον πρὸς τὴν μονάδα πάντες οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἀπὸ δυάδος ἀρξάμενοι συγκρινόμενοι, τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὔτακτα εἴδη ἀπογεννῶσι τῇ οἰκείᾳ ἀκολουθίᾳ· πρῶτος μὲν γὰρ ὁ δύο, διπλάσιός ἐστί τε καὶ λέγεται· ὁ δὲ τρία, τριπλάσιος· ὁ δὲ δ', τετραπλάσιος· καὶ ὁ ε', πενταπλάσιος· καὶ ἐπ' ἄπειρον. τὸ γὰρ πλεονάκις, ἢ ἅπαξ, ἤτοι δὶς, ἢ τρὶς σημαίνει, ἢ ἐφεξῆς μέχρις οὗ βούλει. ἀντιδιέσταλται δὲ τούτῳ τὸ ὑποπολλαπλάσιον· καὶ αὐτὸ φύσει πρῶτον ὑπάρχον, ἐν τῷ ἐλάττονι τῆς ἀνισότητος μέρει·

μείζους, ἀντὶ διπλασίου· εἰκοσόγδοον δὲ, παρὰ τὴν αὐτοῦ παρωνυ-
μίαν, ἥτις ἐν πᾶσι μονὰς ὑπάρχει. εὑρήσεις μέντοι τούτων ἐν
μὲν μονάσι, τὸν ϛʹ· ἐν δὲ δεκάσι, τὸν κηʹ· εἰς τὴν ἐφεξῆς πλάσιν, τὸ αὐ-
τὸ ἐπιδεῖ ποιῆσαι. πάλιν γὰρ, ἐπισυνθεὶς τὸν ἑξῆς τὸν ηʹ, γίνονται
ὁμοῦ ιεʹ· ἐπισκοπῶν αὐτὸν, εὑρίσκω οὐκ ἔτι πρῶτον καὶ ἀσύνθε-
τον. πρὸς δὲ τῷ παρωνύμῳ μορίῳ, ἔτι καὶ πέμπτον ἔχεις καὶ τρί-
τον ἑτερώνυμον· διὸ, οὐ πολλαπλασιάζω τὸν ηʹ αὐτόν· ἀλλ' ἐ-
πισωρεύω τὸν ἑξῆς τὸν ιϛʹ. καὶ γίνεται ὁ λαʹ. οὗτος ἐπειδὴ πρῶτος καὶ ἀ-
σύνθετός ἐστιν, ἀναγκαίως πολλαπλασιασθήσεται, κατὰ τὸ τῆς με-
θόδου καθολικὸν πρόσταγμα, ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ εἰς τὴν σωρείαν προσλη-
φθέντι, τῷ ιϛʹ· καὶ γεννήσεται, ὁ υϞϛʹ, ἐν ἑκατοντάσιν. ἔπειτα τῷ
αὐτῷ τρόπῳ, καὶ ὁ μʹ ρκηʹ ἐν χιλιάσι. καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρις
ἂν ἐντύχῃς παρέπεσθαι. ἡ ἄρα μονὰς δυνάμει, ἀλλ' οὔπω ἐστὶ τέ-
λειος ἐνεργείᾳ· ἐκ γὰρ τοῦ στίχου πρωτίστην αὐτὴν εἰς τὴν σωρεί-
αν λαβὼν, ἐπεσκόπησα κατὰ τὸ πρόσταγμα, ποταπή τις ὑπάρ-
χει· καὶ εὗρον, πρώτην καὶ ἀσύνθετον. ὡς ἀληθῶς γὰρ οὐ κατὰ
μετοχὴν ὡς οἱ ἄλλοι, πρώτη τε ὑπάρχει πάντων ἀριθμοῦ, καὶ
ἀσύνθετος μόνη· πολλαπλασιάζων οὖν αὐτὴν, τῷ λειφθέντι ἐ-
σχάτῳ εἰς τὴν σωρείαν· τουτέστιν ἑαυτῷ, καὶ γεννᾶταί μοι μονάς. ἅ-
παξ γὰρ ἕν, μονάς· τελεία ἄρα ἐστὶ δυνάμει ἡ μονάς. ἴση γὰρ τοῖς
ἰδίοις μέρεσι κατὰ δύναμιν αὕτη· οἱ δ' ἄλλοι κατ' ἐνέργειαν.
προτετεχνολογημένου δὲ ἡμῖν ἐν τοῖς ἄνωθεν περὶ τοῦ καθ' αὑτὸ
ποσοῦ, νῦν μετερχώμεθα, καὶ ἐπὶ τὸ πρός τι. τοῦ πρός τι τοίνυν πο-
σοῦ, δύο αἱ ἀνωτάτω γενικαὶ διαιρέσεις εἰσὶν, ἰσότης, καὶ ἀνισότης.
πᾶν γὰρ ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρούμενον, ἤτοι ἴσον ὑπάρχει, ἢ
ἄνισον· τρίτον δὲ παρὰ ταῦτα οὐδέν. τὸ μὲν οὖν ἴσον θεωρεῖται,
ὅταν τῶν συγκρινομένων τὸ ἕτερον, μήτε ὑπερέχῃ, μήτε ἐλλείπῃ
πρὸς τὴν τοῦ λοιποῦ παραβολήν. οἷον ἑκατὸν, πρὸς ἑκατόν· ἢ δέ-
κα, πρὸς δέκα· ἢ δύο, πρὸς δύο· ἢ μνᾶ, πρὸς μνᾶν· ἢ τάλαντον, πρὸς
τάλαντον· ἢ πῆχυς, πρὸς πῆχυν. καὶ τὰ παραπλήσια εἴτε ἐν
ὄγκῳ, εἴτε ἐν μήκει, εἴτε ἐν βάρει, εἴτε ἐν ποσότητι ἡτινιοῦν. ἔστι
δὲ καὶ ἰδίως ἡ σχέσις αὕτη, ἡ τῆς ποσότητος· ἄσχιστος καθ' ἑαυτὴν

καὶ

πρόσθεσιν, ἐπισωρεύειν· καὶ καθ' ἕκαστον ἐπισωρευομένην, σκοπεῖν
τὸν γιγνόμενον, οἷός ἐστι· ὡς ἂν μὲν εὕρῃς πρῶτον καὶ ἀσύνθετον
ὑπάρχοντα, τῇ τοῦ ἐσχάτου προσληφθέντος ποσότητι πολλα-
πλασιάσεις αὐτὸν, καὶ ἀποτελεσθεὶς πάντως τέλειος ἔσται. ἐὰν
δὲ δεύτερον καὶ σύνθετον, οὐ πολλαπλασιάσῃς, ἀλλ' ἐπισωρεύ-
σῃς τὸν ἑξῆς, καὶ πάλιν ἐπισκέψῃ, τίς ὁ ἀποτελούμενος· καὶ ἐ-
ὰν μὲν δεύτερος καὶ σύνθετος, πάλιν παραλείψεις ἤγουν οὐ πολλα-
πλασιάσεις, ἀλλ' ἐπισωρεύσεις τὸν ἑξῆς· ἐὰν δὲ πρῶτος ἢ ἀ-
σύνθετος, τοῦ ἐσχάτου εἰς τὴν σύνθεσιν παραληφθέντος πολλα-
πλασιάσεις αὐτὸν· ἢ ὁ γινόμενος, τέλειος ἔσται. καὶ τοῦτο, μέχρις
ἀπείρου· παραπλησίου δὲ πάντας ἑξῆς ἀπογεννήσεις τοὺς τελεί-
ους, μηδενὸς παραλειπομένου, α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνϛ,
φιβ, ͵ακδ, ͵βμη, ͵δϟϛ· οἷον τὸν ἕνα, ἐπισωρεύω τὸν δύο· καὶ σκο-
πῶ τὸν συναμφοτέροιν τίς ἀριθμός ἐστι, καὶ εὑρίσκω τὸν γ' ἀ-
ριθμόν· καὶ ἐξ ὧν προαπεδείχθη, πρῶτον εὑρίσκω καὶ ἀσύν-
θετον. ἑτερώνυμον γὰρ μόριον οὐκ ἔχει, ἀλλὰ μόνον τὸ ἑαυτοῦ πα-
ρώνυμον· διὰ τοῦτο αὐτὸν πολλαπλασιάζω, τῇ τοῦ ὑστέρου εἰς τὴν
σωρείαν ληφθέντος ποσότητι· τουτέστι τῷ δύο· καὶ γεννᾶταί μοι ὁ
ἕξ. καὶ τοῦτον ἀποφαίνομαι ἐνεργείᾳ πρῶτον εἶναι τέλειον, καὶ
ἔχειν μέρη μόνα ἐκεῖνα, τὰ ἐνθεωρούμενα τοῖς ἀριθμοῖς, ἐξ ὧν
συνέστη. μοναδικὰ μὲν γὰρ, ἐκ παρωνύμου μέρους ἕξει· ὅ ἐστι τοῦ ἕκ-
του· τρία δὲ, ἐξ ἡμίσεος, κατὰ τὸν β' θεωρουμένου· ἀντιστρόφως δὲ
ἐκ τρίτου. ὁ δὲ κη', καὶ αὐτὸς ἑτέρου προσεπισωρευθέντος τοῖς
προτέροις, τοῦ δ', γεννᾶται τῇ αὐτῇ μεθόδῳ· τὸ γὰρ συγκεφαλαί-
ωμα τῶν τριῶν, τοῦ τε ἑνὸς καὶ δύο καὶ τέσσαρα, γίνεται μὲν, ἑπτά·
εὑρίσκεται δὲ, πρῶτος καὶ ἀσύνθετος. μόνον γὰρ τὸ παρώνυμον
μόριον ἐπιδέχεται τὸ ἕβδομον· διὰ τοῦτο πολυπλασιάζω αὐ-
τὸν, τῇ τοῦ ἐσχάτου προσληφθέντος εἰς τὴν σωρείαν, ποσότητι· καὶ
ἀποβαίνει μοι ὁ κη', τοῖς ἰδίοις μέρεσιν, ἴσος· ἔχων καὶ αὐτὸς, ἐκ
τῶν προειρημένων, τὰ ἐν αὐτοῦ μέρη· ἥμισυ μὲν παρὰ τὴν δυάδα,
τέταρτον δὲ παρὰ τὴν ἑπτάδα· ἕβδομον δὲ, παρὰ τὸν δ'· ἀριθ-
μῶν συγκεφαλαίωμα· τεσσαρεσκαιδέκατον δὲ, παρὰ τὴν τοῦ ἡ-
μίσους,

δῶν ὡς ἂν εἰ ἐν ἀκροτάτῳ τρόπῳ, μεσότης φαίνεται ὁ λεγόμενος τέλειος, ἐν ἰσότητι δὲ ἐπισκοπούμενος· καὶ οὔτε τὰ μέρη ἑαυτοῦ πλείονα ἀποπληρῶν συντεθέντα, οὔτε ἑαυτὸν μείζονα τῶν μερῶν ἀποφαίνων· ἀλλ' ἀεὶ ἴσος τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ὑπάρχων· τὸ δὲ ἴσον, τοῦ πλείονος καὶ ἐλάττονος πάντως ἐν μεταιχμίῳ θεωρεῖται. καὶ ἔστιν ὥς περ τὸ μέτριον τοῦ ὑπερβάλλοντος καὶ τοῦ ἐλλείποντος μεταξύ, καὶ ὁμόφωνον τοῦ ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου. ὅταν οὖν ἀριθμὸς πάνθ' ὅσα ἐνδέχεται ἐν αὐτῷ εἶναι μέρη συναχθέντα καὶ συγκεφαλαιωθέντα ἐν συγκρίσει τῇ πρὸς ἑαυτὸν ἔχων, μήτε ὑπερβάλλει τῷ πλήθει αὐτά, μήτ' ὑπερβάλλεται ὑπ' αὐτῶν, τότε ὁ τοιοῦτος τέλειος κυρίως λέγεται, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· οἷον ὁ ς, καὶ ὁ κη. ὁ μὲν γὰρ ς, ἔχει μέρη, ἥμισυ, τρίτον, ἕκτον, ἅπερ εἰσί, τρία, δύο, ἕν· ἃ συγκεφαλαιωθέντα ὁμοῦ καὶ γενόμενα ς, ἴσα τῷ ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχει· καὶ οὔτε πλείονα, οὔτε ἐλάττονα. ὁ δὲ ὁ κη, μέρη ἔχει, ἥμισυ, τέταρτον, ἕβδομον, τεσσαρεσκαιδέκατον, εἰκοστόγδοον· ἅπερ, γίνεται ιδ, ζ, δ, β, α· καὶ ὑφ' ἓν συναθροισθέντα, ἀποτελεῖ τὸν κη· καὶ οὕτως οὔτε τὰ μέρη πλείονα τοῦ ὅλου, οὔτε τὸ ὅλον τῶν μερῶν· ἀλλ' ἡ σύγκρισις ἐν ἰσότητι· ὅπερ τελείου ἰδιότης. συμβέβηκε δὲ, καθάπερ τὰ καλά τά τε κατ' ἀρετὴν, σπάνια καὶ εὐαρίθμητα, τὰ δὲ αἰσχρὰ καὶ ἐν κακίᾳ εἶναι πολύχοα· οὕτω καὶ ὑπερτελεῖς μὲν καὶ ἐλλιπεῖς παμπόλλους καὶ ἀτάκτους εὑρίσκεσθαι, ἀκόσμου οὔσης τῆς αὐτῶν εὑρέσεως· τελείου δὲ, εὐαριθμήτους καὶ τεταγμένους μετὰ πρεπούσης κόσμου. εἷς μὲν γὰρ μόνος εὑρίσκεται ἐν μονάσιν ὁ ς· ἕτερος δὲ μόνος, ἐν δεκάσιν, ὁ κη· τρίτος δὲ τις, ἐν βαθμῷ ἑκατοντάδος μόνος, ὁ υϟς. τέταρτος, ἐν χιλιάδων ὅρῳ, τοῦτ' ἔστιν ἐντὸς μυριάδων, ὁ ηρκη· καὶ παρέπεται αὐτοῖς μίαν τὴν μίαν, εἰς ἑξάδα ἢ ὀγδοάδα καταλήγειν, καὶ πάντως ἐν ἀρτίοις. γένεσις δὲ αὐτῶν, γλαφυρά τις καὶ ἀσφαλής· οὔτε παραλείπουσά τινα τῶν τελείων, οὔτε διαφοροῦσά τινα τῶν μὴ τοιούτων, τούτῳ γινομένη τῷ τρόπῳ· ἐκθέσθαι τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀρτιάκις ἀρτίους, προβιβάζοντας ἑξῆς ἐν ἑνὶ στίχῳ μέχρις οὗ βούλει· εἶτα ἀεὶ κατὰ τοὺς προσθε-

ρεστὴν μέλεσι τελεσιουργούμενον εἴη· δέκα ἢ γλώσσας ἔχον, κατὰ τὸν ποιητὴν, δέκα δὲ στόματα, ἢ ἐννεάχειλον, ἢ τριστοίχοις κεχρημένον ὀδοῦσιν, ἢ ἑκατόγχειρον, ἢ πλείονας δακτύλους εἰς ἑτέρᾳ τῶν χειρῶν ἔχον· οὕτω καὶ εἴ τις ἀριθμὸς πάντων τῶν ἐν αὐτῷ μορίων ἐξεταζομένων, καὶ εἰς ἓν ἄθροισμα συγκεφαλαιωθέντων ἀντεξεταζόμενος εὑρίσκοιτο πλείονα τὰ ἴδια μέρη ἔχων, ὑπερτελὴς οὗτος καλεῖται. ὑπερβαίνει γὰρ τὴν τοῦ τελείου πρὸς τὰ ἑαυτοῦ μέρη συμμετρίαν· οἷον ἐστὶν ὁ ιβ, ὁ κδ, καὶ ἄλλοι τινές. ἔχει μὲν γὰρ ὁ ιβ, ἥμισυ ϛ· τρίτον, δ ὑπέρ φ· τέταρτον, γ· ἕκτον, β· δωδέκατον, α· ἅπερ ὁμοῦ συγκεφαλαιωθέντα ποιεῖ ιϛ· ὅς πλείων ἐστὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ιβ. τὰ ἄρα μέρη αὐτοῦ, πλείονα τοῦ ὅλου ὑπάρχει· ὁ δὲ κδ, ἔχει καὶ αὐτὸς, ἥμισυ, τρίτον, τέταρτον, ἕκτον, ὄγδοον, δωδέκατον, εἰκοστοτέταρτον· ἅπερ ὑπάρχει ιβ, η, ϛ, δ, γ, β, α. συγκεφαλαιωθέντα δὲ, συνάγει τὸν λϛ· ὃς συγκρινόμενος τῷ ἐξ ἀρχῆς τῷ κδ, μείζων αὐτοῦ εὑρίσκεται· καί τοι, ἐκ τῶν ἐκείνου μορίων συντεθείς. πλείονα ἄρα κἀνταῦθα τὰ μέρη, τοῦ ὅλου. ἐλλιπὴς δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ τὸ ἐναντίον τοῖς δεχθεῖσι πεπονθὼς, καὶ τὰ ἑαυτοῦ μέρη, συντεθέντα ὑφ' ἓν κατὰ σύγκρισιν, ἑαυτοῦ ἐλάττονα κεκτημένος· ὡς εἴ τι ζῷον τῶν κατὰ φύσιν μελῶν ἢ μορίων ἐλαττοῦται· ὡς τὸ κυκλοτερὴς δ' ὀφθαλμὸς εἷς ἐνέκειτο μετώπῳ· ἢ εἴ τις μονόχειρον εἴη· ἢ εἰς ἑτέρᾳ τῶν χειρῶν, ἐλάττονας τῶν ε, δακτύλους κεκτημένος εἴη ἢ ἄγλωσσος, ἢ τοιούτου τινὸς ἐστερημένος, ἐλλιπὴς ἂν ὁ τοιοῦτος λέγοιτο· καὶ οἱονεὶ πηρὸς, κατὰ τὴν τοῦ ἀριθμοῦ ἰδιότητα, τοῦ ἔχοντος τὰ ἴδια μέρη ἐλάττονα ἑαυτοῦ· οἷός ἐστιν ὁ η, ὁ ιδ. ὁ μὲν γὰρ η, μέρος ἔχει ἥμισυ, τέταρτον, ὄγδοον· ἅπερ ἐστὶ δ, δύο, ἕν· συγκεφαλαιωθέντα δὲ εἰς τὸ αὐτὸ, ζ γίνονται· καὶ ἐλάττονα τοῦ ἐξ ἀρχῆς, τὰ ἄκρα μέρη, ἐλλείπει πρὸς τὴν τοῦ ὅλου συμπλήρωσιν. πάλιν ὁ ιδ, ἔχει ἥμισυ, ἕβδομον, τέσσαρες καὶ δέκατον· ἅπερ εἰσὶν, ζ, β, α· σύμπαντα δὲ ὁμοῦ, δέκα, ἐλάττονα τοῦ ἐξ ἀρχῆς. ἐλλείπει ἄρα καὶ οὗτος ἐν τοῖς μέρεσι πρὸς τὸ συμπληρωθῆναι τὸ ὅλον ἐξ αὐτῶν. ἀντικειμένων δὲ τῶν δύο τούτων εἰ-

τε δὲ ἤδη ἕτερόν τινα ἀριθμὸν πολλοστὸν τῇ ποσότητι διαφερού-
μενον, δευτέρους λέγει εἶναι πρὸς ἀλλήλους καὶ συνθέτους·
καὶ κοινὸν αὐτοῖς εἶναι μέτρον, αὐτὸν ἐκεῖνον, τὸν διαφορούμενον
ἀριθμόν. οἷον ἐὰν ὁ κγ΄ προβληθῇ ἡμῖν καὶ ὁ με΄, ἄφελε τὸν
κγ΄ ἀπὸ τοῦ με΄, καὶ λειφθήσεται κβ΄· τοῦτον ἀνταφαιρῶ ἀπὸ τοῦ
κγ΄· λοιπὴ μονάς· ταύτην ἀφαιρῶν ἀπὸ τοῦ κβ΄ ὁσάκις δυνατὸν,
εἰς μονάδα καταλήξεις. διὰ τοῦτο, πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι πρὸς ἀλ-
λήλους εἰσί· καὶ κοινὸν αὐτῶν μέτρον, ἡ ἀπολειφθεῖσα μονάς.
εἰ δὲ ἑτέρους ἀριθμοὺς προσθείη τις, τὸν κα΄ καὶ τὸν μθ΄, ἀφαι-
ρῶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος, λείπεται κη΄· εἰ πάλιν ἐκ τού-
του ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν κα΄ (δυνατὸν γάρ) λείπεται ζ΄· ταῦτα ἀν-
ταφαιρῶ ἀπὸ τοῦ κα΄, καταλείπεται ιδ΄· ἐξ ὧν πάλιν τὰ ἑπτὰ
ἐπεὶ ἀφαιρῶ, δυνατὸν γάρ, λειφθήσεται ἑπτά· ἑβδομάδα δὲ, ἀπὸ
ἑβδομάδος οὐ δυνατὸν ἀφαιρεθῆναι. ἡ ἄρα κατάληξις αὐτῶν,
εἰς διαφορούμενον ζ΄ ἐπεραιώθη. δευτέρους οὖν πρὸς ἀλλήλους καὶ
συνθέτους ἀπεφαίνου τοὺς ἐξ ἀρχῆς, τὸν κα΄, καὶ τὸν μθ΄ καὶ κοινὸν αὐτῶν
μέτρον, πρὸς τῇ καθολικῇ μονάδι, τὸν ἑπτά. πάλιν δὲ ἄνωθεν τῶν
ἁπλῶς ἀρτίων ἀριθμῶν, οἱ μὲν εἰσὶν ὑπερτελεῖς, οἱ δὲ, ἐλλιπεῖς·
καθάπερ ἀκρότητες ἀντικείμεναι ἀλλήλαις· οἱ δὲ, ἀναμέσον ἀμφο-
τέρων· οἳ καὶ λέγονται τέλειοι· καὶ εἰσὶν, οἱ μὲν ἀντικεῖσθαι λεγόμενοι ἀλλή-
λοις ὑπερτελεῖς τε καὶ ἐλλιπεῖς, ἐν τῇ τῆς ἀνισότητος σχέσει διαιρού-
μενοι, εἴς τε τὸ πλέον, καὶ εἰς τὸ ἔλαττον. ἕτερος γὰρ παρὰ ταῦτα
τρόπος ἀνισότητος οὐκ ἂν ἐπινοηθείη· καθάπερ οὔτε κακία, οὔ-
τε νόσος, οὔτε ἀσυμμετρία, οὔτε ἀπρέπεια, οὔτε τῶν τοιούτων
ἕκαστον. ἐν μὲν γὰρ τῷ πλείονι, αἵ τε ὑπερβολαὶ καὶ πλεονεξίαι,
καὶ ὑπερεκπτώσεις καὶ πλεονότητες γίνονται· ἐν δὲ τῷ ἐλάττονι, αἱ ἔνδειαι
καὶ ἐλλείψεις, καὶ στερήσεις, καὶ ὀλιγοεξίαι· ἐν δὲ τῷ μεταξὺ
τοῦ πλείονος καὶ τοῦ ἐλάττονος κειμένῳ, ὅ ἐστιν ἴσον, ἀρεταί τε καὶ
ὑγεῖαι, καὶ μετριότητες, καὶ εὐπρέπειαι, καὶ κάλλη, καὶ τὰ ὅμοια·
ὧν γνωριμώτατον τὸ λεχθὲν τοῦ ἀριθμοῦ εἶδος τὸ τέλειον. ὑπερτε-
λὴς μὲν οὖν ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὲρ τὰ προσήκοντα αὐτῷ καὶ ἤδη βάλ-
λοντα μέρη, ἔχων ἕτερα πλείονα, ὡσανεὶ εἴ τι ζῶον πλείοσι μέ-

ρεσιν

φῳ τινὶ ὑπ' αὐτοῦ· ἀλλὰ τινὰς μὲν, παντελῶς διαφεύγοντας τὸ μετρηθῆναι ὑφ' οὑτινοσοῦν. τινὰς δὲ, ὑπὸ ἑνὸς μόνου μετρουμένους· τινὰς δὲ, ὑπὸ δύο, ἢ καὶ πλειόνων. οἱ μὲν οὖν οὐδαμῶς μετρηθέντες, ἀλλὰ διαφυγόντες τοῦτο, πρῶτοί εἰσι καὶ ἀσύνθετοι, ὡς ὑπὸ κοσκίνου διακριθέντες· οἱ δὲ ὑπὸ ἑνὸς μόνου μετρηθέντες κατὰ τὴν ἑαυτῶν ποσότητα, ἓν μόνον μόριον ἐπώνυμον ἕξουσι πρὸς τοῦ παρωνύμου· οἱ δὲ ὑπὸ ἑνὸς, ἑτέρου δὲ ποσότητι καὶ μὴ τῇ ἑαυτοῦ, ἢ ὑπὸ δύο ὁμοῦ μετρηθέντες, πλείονα ἕξουσι τὰ ἐπώνυμα μέρη πρὸς τοῦ παρωνύμου. οὗτοι οὖν ἔσονται δεύτεροι καὶ σύνθετοι. τὸ δὲ τρίτον μέρος τὸ κοινὸν ἀμφοτέρων, ὃ καθ' ἑαυτὸ μὲν ἐστὶ καὶ σύνθετον· πρὸς ἄλλο δὲ, πρῶτον καὶ ἀσύνθετον, ἔσονται οἱ ἀποτελούμενοι ἀριθμοὶ κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα πρῶτον καὶ ἀσύνθετον μετρήσαντος ἑνὸς, εἴ τις γενόμενος συγκρίνοιτο πρὸς ἄλλον, ὡσαύτως τὴν γένεσιν ἔχοντα· ὥσπερ ὁ θ' ἐγένετο ἐκ τοῦ τρίτου κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα μετρήσαντος, δὶς γοῦν· εἰ συγκρίνοιτο πρὸς τὸν κε', τοῦ ε' κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα μετρήσαντος, πεντάκις γὰρ, κοινὸν μέτρον τούτοις οὐκ ἔσται, εἰ μὴ μόνη ἡ μονάς. ὡς δ' ἂν καὶ μέθοδον ἔχοιμεν διαγνωστικὴν τὴν πρὸς ἀλλήλους ἤτοι πρώτων καὶ ἀσυνθέτων, ἢ δευτέρων καὶ συνθέτων, ὅτι ἐκείνων μὲν κοινὸν μέτρον μονάς ἐστι, τούτων δὲ πρὸς τῇ μονάδι καὶ ἕτερός τις ἀριθμός, καὶ ποῖός ἐστιν ὑπάρχει, εἰ ὑποδείκνυται ἡμῖν δύο ποσοὶ ἀριθμοὶ προτείναντός τινος καὶ ἐπιτάξαντος διαγνῶναι, πότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀσύνθετοί εἰσιν, ἢ δεύτεροι καὶ σύνθετοι, καὶ εἰ δεύτεροι καὶ σύνθετοι, ποῖος ἀριθμὸς αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἐστί. χρὴ ἀντισυγκρίνειν τοὺς προτεθέντας ἀριθμούς, καὶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀεὶ ἀφαιρεῖν ὁσάκις δυνατόν· εἶτα τοῦτον ἀφαιρεθέντος, ἀνταφαιρεῖν ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, ὁσάκις πάλιν δυνατόν. ἡ γὰρ ἀντίθεσις αὕτη καὶ ἀνταφαίρεσις, ἀναγκαίως ἤτοι ἐπὶ μονάδα καταλήξει ἢ ἐπὶ ἕνα τινὰ τὸν ἀριθμόν, ἀναγκαίως δὲ περισσόν. ὅταν μὲν οὖν ἐπὶ μονάδα αἱ ἀφαιρέσεις περαιωθῶσι, πρώτους καὶ ἀσυνθέτους αὐτοὺς ἀποφαίνουσιν εἶναι πρὸς ἀλλήλους· ὅ

πλείστους ὡς δυνατὸν μάλιστα ἐπὶ μήκιστον στίχον, ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ πρώτου, ἐπισκοπῶ τίνας οἷός τε ἐστὶ μετρεῖν ἕκαστος· καὶ εὑρίσκω δυνατὸν ὄντα τὸν πρῶτον ἤτοι τὸν γ', τοὺς δύο μέσους παραλείποντα, μετρεῖν, μέχρις οὗ προχωρεῖν ἐθέλομεν· οὐχ ὡς ἔτυχε δὲ, καὶ εἰκῆ μετροῦντα, ἀλλὰ τὸν μὲν πρώτως αὐτῷ κείμενον, τουτέστι τὸν τοὺς δύο μέσους ὑπερβαίνοντα, κατὰ τὴν τοῦ πρωτίστου ἐν τῷ στίχῳ κειμένου ποσότητα μετρήσει· τουτέστι, κατὰ τὴν ἑαυτοῦ, τρὶς γάρ· τὸν δ' ἀπ' ἐκείνου δύο διαλείποντα, κατὰ τὴν τοῦ δευτέρου τεταγμένου, πεντάκις γάρ· τὸν δὲ περαιτέρω πάλιν δύο διαλείποντα, κατὰ τὴν τοῦ τρίτου τεταγμένου, ἑπτάκις γάρ· τὸν δὲ ἔτι περαιτέρω ὑπὲρ δύο κείμενον, κατὰ τὴν τοῦ τετάρτου τεταγμένου, ἐνάκις γάρ· καὶ ἐπ' ἄπειρον τὸν αὐτὸν τρόπον. εἶτα μετὰ τοῦτον ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς ἐπὶ τὸν δεύτερον ἐλθὼν, σκοπῶ τίνας οἷόν τε ἐστὶ μετρεῖν· καὶ εὑρίσκω πάντας τοὺς τέσσαρας διαλείποντας, ἀλλὰ τὸν μὲν πρῶτον, κατὰ τὴν τοῦ ἐν τῷ στίχῳ πρώτου τεταγμένου ποσότητα, τρὶς γάρ· τὸν δὲ δεύτερον, κατὰ τὴν τοῦ δευτέρου, πεντάκις γάρ· τὸν δὲ τρίτον, κατὰ τὴν τοῦ τρίτου, ἑπτάκις γάρ· καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ἀεί. πάλιν δὲ ἄνωθεν, ὁ τρίτος, ὁ ζ ὁ τὸ μέτρον παραλαβὼν, μετρήσει τοὺς ἓξ διαλείποντας· ἀλλὰ τὸν μὲν πρῶτον, κατὰ τὴν τοῦ τρία ποσότητα πρώτου κειμένου· τὸν δὲ δεύτερον, κατὰ τὴν τοῦ ε, δευτεροταγὴς γὰρ οὗτος· τὸν δὲ τρίτον, κατὰ τὴν τοῦ ζ· τρίτην γὰρ ἔχει καὶ οὗτος τάξιν ἐν τῷ στίχῳ. καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, δι' ὅλου ἀπαρεμποδίστως προχωρήσει τοῦτο· ὥστε τὸ μὲν μετρεῖν διαδέξονται, κατὰ τὴν ἐν τῷ στίχῳ αὐτῶν ἐγκειμένην τάξιν· τὸ δὲ τοσούσδε διαλείποντας, κατὰ τὴν ἀπὸ δυάδος ἐπ' ἄπειρον εὔτακτον τὴν ἀρτίων προκοπὴν, ἢ κατὰ τὴν τῆς χώρας διπλασίασιν, καθ' ἣν ὁ μετρῶν τέτακται· τὸ δὲ ποσάκις, κατὰ τὴν τ ἀπὸ τριάδος περισσῶν εὔτακτον προχώρησιν. ἐὰν οὖν σημείοις τισὶν ἐπισημήνῃς τοὺς ἀριθμοὺς, εὑρήσεις τοὺς μεταλαμβάνοντας τὸ μετρεῖν, οὔτε ἅμα πάντας τὸν αὐτόν ποτε μετροῦντας, ἔστι δὲ ὅτε οὐδὲ δύο τὸν αὐτὸν, οὔτε πάντας ἁπλῶς τοὺς ἐκκειμένους, ὑποπίπτοντας μέ-

τρῳ

ηγορεῖται ὡς οἱ ἕτεροι, καὶ παρώνυμον ἔχει μόριον ὡς κἀκεῖνοι, διὰ τὴν τοῦ κοινοῦ γένους φύσιν· ἐξηλλαγμένως δὲ καὶ ἰδιαιτέρως, ἔτι καὶ ἑτερωνύμῳ μέρει, ἢ μέρεσι χρῆται, ὁ μὲν θ, πρὸς τῷ αὐτῷ ἔτι καὶ τρίτῳ, ὁ ιε ἔτι καὶ τρίτῳ καὶ πέμπτῳ πρὸς ιε· ὁ δὲ κα, καὶ ἑβδόμῳ καὶ τρίτῳ, πρὸς τῷ εἰκοστοπρώτῳ· ὁ δὲ κε, πρὸς τῷ εἰκοστοπέμπτῳ τῷ παρωνύμῳ, ἔτι καὶ ἑτερωνύμῳ χρῆται τῷ πέμπτῳ. δεύτερος οὖν λέγεται, ὅτι καὶ ἄλλῳ σὺν τῇ μονάδι μέτρῳ δύναται χρῆσθαι· καὶ ὅτι, οὐκ ἀρχοειδής, ἀλλ' ἑτέρου προστεθέντος, αὐτὸς ἐκείνου· ὁ μὲν θ, τοῦ γ· ὁ δὲ ιε, τοῦ ε, ἢ νὴ Δία, τοῦ γ· καὶ οἱ ἑξῆς, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. σύνθετος δὲ ἐκ τοιαύτης αἰτίας, ὅτι διαλυθείη ἂν εἰς ἐκεῖνα ἐξ ὧν συνέστηκεν, εἴπερ καὶ μετρηθείη ἂν ὑπ' αὐτῶν· οὐδὲν δὲ διαλυτὸν ἀσύνθετον, ἀλλὰ πάντως σύνθετον. Ἀντικειμένων δὴ ἀλλήλοις τῶν εἰδῶν τοῦ περισσοῦ, τρίτον ἀναμέσον τι θεωρεῖται οἱονεὶ ἐξ ἀμφοτέρων εἰδοποιούμενον, τὸ καθ' αὐτὸ μὲν, δεύτερον καὶ σύνθετον· πρὸς ἄλλο δέ, πρῶτον καὶ ἀσύνθετον. ὅταν ἀριθμὸς πρὸς τῷ κοινῷ μέτρῳ τῇ μονάδι, ἔτι καὶ ἑτέρῳ μετρεῖται τινὶ μέτρῳ, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμενος καὶ ἑτερώνυμον μέρος ἢ μέρη ἐπιδέξασθαι πρὸς τῷ παρωνύμῳ, πρὸς ἄλλον τινὰ ὁμοίως ἔχοντα ἀντεξεταζόμενος εὑρίσκηται, μήτε κοινῷ μέτρῳ μετρηθῆναι δυνάμενος πρὸς ἐκεῖνον, μήτε τὸ αὐτὸ ὁμώνυμον μέρος ἔχων τοῖς ἁπλῶς ἐν ἐκείνῳ· οἷον, ὁ θ πρὸς τὸν κε· ἑκάτερος γὰρ καθ' ἑαυτὸν δεύτερός ἐστι καὶ σύνθετος· πρὸς δὲ ἀλλήλους, μόνῃ μονάδι κοινῷ μέτρῳ χρῶνται· καὶ οὐδὲν μόριον ὁμωνυμεῖ ἐν ἀμφοτέροις, ἀλλὰ τὸ ἐν τούτῳ τρίτον, οὐκ ἔστιν ἐν ἐκείνῳ· οὐδὲ τὸ ἐν ἐκείνῳ πέμπτον, ἐν τούτῳ εὑρίσκεται. ἡ δὲ τούτων γένεσις, ὑπὸ Ἐρατοσθένους καλεῖται κόσκινον. ἐπειδὴ ἀναπεφυρμένους τοὺς περισσοὺς λαβόντες καὶ ἀδιακρίτους, ἐξ αὐτῶν τῇ τῆς γενέσεως μεθόδῳ ταύτῃ διαχωρίζομεν, ὡς δι' ὀργάνου ἢ κοσκίνου τινός· καὶ ἰδίᾳ μὲν, τοὺς πρώτους καὶ ἀσυνθέτους· ἰδίᾳ δέ, τοὺς δευτέρους καὶ συνθέτους· χωρὶς δέ, τοὺς μικτοὺς εὑρίσκομεν. ἔστι δὲ ὁ τρόπος τοῦ κοσκίνου, τοιοῦτος· ἐκθέμενος τοὺς ἀπὸ τριάδος πάντας ἑξῆς

λων διαφέροντα· ὧν τὸ μὲν, καλεῖται πρῶτον καὶ ἀσύνθετον· τὸ δὲ ἀντικείμενον τούτῳ, δεύτερον καὶ σύνθετον· τὸ δὲ ἐν μεταξὺ μίᾳ ἀμφοῖν τούτοιν θεωρούμενον, ὡς μεσότης ἐν ἀκρότησιν, ὃ καθ' ἑαυτὸ μὲν δεύτερον καὶ σύνθετον· πρὸς ἄλλο δὲ, πρῶτον καὶ ἀσύνθετον. τὸ μὲν οὖν πρώτιστον εἶδος, τὸ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον γίνεται, ὅταν ἀριθμὸς περισσὸς, μόριον μηδὲν ἕτερον ἐπιδέχηται, εἰ μὴ τὸ παρώνυμον ἑαυτοῦ. ὃ, καὶ ἐξανάγκης μονὰς ἔσται· οἷον, ὁ γ̄, ὁ ε̄, ὁ ζ̄, ὁ ια̅, ὁ ιγ̄, ὁ ιζ̄, ὁ ιθ̄, ὁ κγ̄, ὁ κθ̄, ὁ λα̅. τούτων δὲ ἕκαστος, οὐδὲ μιᾷ μηχανῇ εὑρεθήσεται ἔχων ἑτερώνυμον μόριον· ἀλλὰ μόνον τὸ ἑαυτοῦ παρώνυμον· ὃ ἴσον, μονάδα πάντως ἐν ἑκάστῳ· ὁ μὲν γὰρ, μόνον τρίτον, τὸ ἑαυτοῦ παρώνυμον· καὶ ἴσον πάντως μονάδα· ὁ δὲ πέντε, μόνον πέμπτον· καὶ ὁ ια̅, μόνον ἑνδέκατον· καὶ ὁ τριάκοντα, ἓν τριακοστὸν μόνον. καὶ ἐν πᾶσι ταῦτα τὰ μέρη, μονὰς ὑπάρχει. τετύχηκε δὲ τοῦ ὀνόματος τούτου, ὅτι τοῦ κοινοῦ πάντων ἀριθμοῦ καὶ πρωτίστου μονάδι μόνῃ δύναται μετρεῖσθαι· ἑτέρῳ δὲ οὐδενὶ, ἀλλὰ ὃ ὑπ' οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἑαυτοῦ συντεθέντος γίνεται· ἀλλὰ μόνης μονάδος· πεντάκις μὲν συντεθείσης, ὁ ε̄· ἑπτάκις δὲ, ὁ ζ̄· καὶ οἱ λοιποὶ κατὰ τὴν αὐτῶν ποσότητα. αὐτῶν μέντοι συντεθέντων ἑαυτοῖς, δύναντ' ἄλλοι γενέσθαι, ἀπὸ πηγῆς ὡσανεὶ καὶ ῥίζης αὐτῶν τούτων ἀρξάμενοι· διόπερ πρῶτοι καλοῦνται, ὡσανεὶ ἀρχαὶ ἐκείνων προϋποκείμενοι. ἀρχὴ δὲ πᾶσα, στοιχειώδης καὶ ἀσύνθετος, εἰς ἣν πάντα ἀναλύονται, καὶ ἐξ ἧς πάντα συνίσταται· αὐτὴ δὲ εἰς οὐδὲν, καὶ ἐξ οὐδενός. Δεύτερος δὲ καὶ σύνθετός ἐστιν ἀριθμὸς, περισσὸς μὲν, διὰ δὲ τὸ ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γένους διακεκρίσθαι, ἀρχοειδὲς οὐδὲν ἔχων ἐν ἑαυτοῦ. συντεθέντος γὰρ ἑτέρου τινὸς, τὴν γένεσιν αὐτὸς ἔχει· διόπερ συμβαίνει αὐτοῦ παρωνύμῳ μορίῳ, ἔτι καὶ ἑτερώνυμον, ἢ ἑτερώνυμα κεκτῆσθαι· τὸ μὲν παρώνυμον καθὰ καὶ ἐπὶ πάντων, μονάδα εἶναι πάντως· τὸ δὲ ἑτερώνυμον ἢ ἑτερώνυμα, οὐδέποτε μονάδα· ἀλλὰ πάντως ἢ ἐκείνοις ἂν συντεθέντων ἀπετελέσθη· οἷον θ̄, ιε̄, κα̅, κε̄, κζ̄, λγ̄, λε̄, λθ̄. τούτων γὰρ ἕκαστος, καὶ ὑπὸ μονάδος με-

τρεῖται

ἐξ ἀμφοτέρων τὴν γένεσιν συνυφαίνεσθαι, ὡς κοινὸν ἀμφοτέρων. ἐκθώμεθα δὴ τοὺς ἀπὸ τριάδος περιττούς, ἰδίᾳ εὐτάκτως ἐν ἑνὶ στίχῳ, γ, ε, ζ, θ, ια, ιγ, ιε, ιζ, ιθ· καὶ ἐφεξῆς. τοὺς δὲ ἀπὸ τετράδος ἀρτιάκις ἀρτίου, πάλιν ἐφεξῆς ἐν ἑτέρῳ στίχῳ κατὰ τὴν τάξιν τὴν αὐτήν, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς· καὶ ἐφεξῆς, μέχρις οὗ βούλει· ἀπὸ ὁποτέρου δὴ στίχου (ἀδιάφορον γὰρ) τῷ πρώτῳ κειμένῳ ἀριθμῷ πολυπλασίαζε ἐξ ἀρχῆς πάντας ἑξῆς, τοὺς ἐν τῷ λοιπῷ στίχῳ· καὶ τοὺς ἀποπληρουμένους σημειοῦ· εἶτα πάλιν τοῦ αὐτοῦ στίχου τῷ δευτέρῳ ἀριθμῷ, πολυπλασίαζε τοὺς αὐτοὺς ἄνωθεν· καὶ μέχρις ἂν προχωρῇ, οὐδένες ἄλλοι σοι ἀπογεννήσονται πλὴν οἱ περιάρτιοι. χάριν δὲ ὑποδείγματος, χρησώμεθα τῷ πρώτῳ ἀριθμῷ τοῦ στίχου τῶν περιττῶν· καὶ πολυπλασιάσωμεν αὐτῷ, τοὺς ἐν τῷ ἑτέρῳ στίχῳ τάξει πάντας· τρὶς δ, τρὶς η, τρὶς ις, τρὶς λβ· καὶ ἑξῆς, μέχρις ἀπείρου. ἔσονται γὰρ ιβ, κδ, μη, ϙς· οὓς δεῖ σημειώσασθαι ἐν ἑνὶ στίχῳ. εἶτα ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς πάλιν τῷ δευτέρῳ ἀριθμῷ, τὸ αὐτὸ ποίει, πεντάκις δ, πεντάκις η, πεντάκις ις, πεντάκις λβ· ἀποπληρωθήσονται γὰρ οἵδε, κ, μ, π, ρξ. εἶτα πάλιν, τῷ ἀριθμῷ τῷ ἑπτά, τὸ αὐτὸ ποίει, ἑπτάκις δ, ἑπτάκις ὀκτώ, ἑπτάκις ις, ἑπτάκις λβ· οἱ γὰρ γινόμενοί εἰσιν, κη, νς, ριβ, σκδ· κατὰ τὰ αὐτά, μέχρις οὗ βούλει προχωρεῖν, συμφωνήσει σοι. ὅταν δὴ, τοὺς ἐξ ἑκάστου πολυπλασιασμοῦ ἐν ἰδίῳ στίχῳ ἐκτάξῃς, παραλλήλους ποιούμενος τοὺς στίχους, φανήσεταί σοι θαυμαστῶς· κατὰ μὲν τὸ πλάτος συμβαῖνον τὸ τῶν ἀρτιοπερίσσων ἰδίωμα· ὅτι ἀεὶ τοῖς ἄκροις ὁ μέσος διπλάσιος, εἰ εἷς ᾖ· εἰ δὲ δύο μέσοι, ἴσοι κατὰ σύνθεσιν. κατὰ δὲ τὸ μῆκος, τὸ τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων· ὅτι τὸ ὑπὸ, ἴσον τῷ ἀπὸ, εἰ μία εἴη μεσότης· ἢ τῷ ὑπὸ, εἰ δύο εἶεν. ὥστε τὰ ἀμφοτέρων ἰδιώματα, τούτῳ μόνῳ συμβέβηκεν, ὡς ὄντι φυσικῷ μίγματι αὐτῶν. τοῦ δὲ περιττοῦ καὶ πάλιν καθ' ὑποδιαίρεσιν διακεκριμένου πρὸς τὸν ἄρτιον, καὶ κατὰ μηδὲν κοινωνοῦντος, ἐπείπερ ἐκεῖνος μὲν δίχα εἰς ἴσα διαιρετός, οὗτος δὲ εἰς δύο ἴσα ἀδιαίρετος, τρία ὁμοίως εἴδη εὑρίσκεται ἀλλή-

λων

δύο ἀκροτήτων μία τις ὢν αὐτὸς μεσότης. ὅμοιος γὰρ κατὰ μέν τι τῷ ἀρτιάκις ἀρτίῳ ὑπάρχει· κατὰ δέ τι, τῷ ἀρτιοπερίσσῳ. καὶ ᾧ μὲν τοῦ ἑτέρου ἀπήλλακται, τούτῳ κοινωνεῖ τῷ λοιπῷ· ᾧ δὲ κοινόν τι ἔχει πρὸς ἕτερον, τούτῳ διαφέρει τοῦ λοιποῦ. ἔστι γὰρ, ὅταν ἀριθμὸς ἄρτιος εἰς δύο ἴσα διαιρεθῆναι δυνάμενος, διαιρούμενος ὁμοίως τὰ ἑαυτοῦ μέρη ἔχει. ἔστι δ' ὅτε καὶ τῶν μερῶν τὰ μέρη μέχρι μέν τοι μονάδος μὴ δυνάμενος τὴν τῶν μερῶν λύσιν ἀγαγεῖν· οἷός ἐστιν, ὁ ιβ, ὁ κδ, ὁ κη, ὁ μη. ἥμισυ μὲν γὰρ τούτων ἕκαστος ἴδιον ἔχει· καὶ πάντως ἡμίσεος, ἥμισυ. ἔστι δ' ὅτε, ἐν αὐτοῖς τις εὑρίσκεται καὶ ἐπιπλέον τὸν διχασμὸν ἐπιδεχόμενον εἰς τὰ μέρη· οὐδεὶς μέν τοι τὸ παράπαν μέχρι τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος τὰ μέρη μεριστὰ, εἰς ἥμισυ ἕξει. τῷ μὲν οὖν πλείονας μιᾶς τομῆς ἐπιδέχεσθαι, ὁμοιοῦται μὲν τῷ ἀρτιάκις ἀρτίῳ, ἀφίσταται δὲ τοῦ ἀρτιοπερίσσου· τῷ δὲ μὴ ἀπολήγειν ποτὲ εἰς μονάδα αὐτοῦ τὰς τομὰς, ὁμοιοῦται μὲν τῷ ἀρτιοπερίσσῳ, ἀφίσταται δὲ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου. Συμβέβηκε δ' αὐτῷ μόνῳ ὑφ' ἓν ἔχειν τὰ ἑκατέρῳ ἐκείνῳ ἰδίως συμβεβηκότα· καὶ πάλιν ἃ μηδετέρῳ. ἑκάτερος γὰρ ἐκείνων, ὁ μὲν, τὸ μέγιστον μόνον μέρος ἔχει τμητόν· ὁ δὲ, τὸ μικρότατον μόνον ἄτμητον. τούτῳ γὰρ, οὐδέτερον τούτων ὑπάρχει· πλείονα μὲν γὰρ τοῦ ἑνὸς τμήματος, ἐν τῷ ἐλάσσονι· καὶ πάλιν ἐστὶν ἐν αὐτῷ, τινὰ μέρη, μὴ ἐναντιωνυμοῦντα ταῖς δυνάμεσι μηδετερογενοῦντα πρὸς αὐτὰς κατ' ἐκεῖνα τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου. ἔνεστι δὲ πάντως, καὶ ἕτερα ἐναντιωνυμούμενα ἑτερογενῶς, ἀπὸ τῶν δυνάμεων κατ' ἐκεῖνα τοῦ ἀρτιοπερίσσου. οἷον, ἐν τῷ κδ, ἐναντιωνυμεῖ τὰ μέρη δυνάμεσι· τέταρτον, ϛ· ἥμισυ, ιβ· ἕκτον, δ· δωδέκατον, δύο. ἀντιπεπονθεῖ δὲ, τρίτον, η· ὄγδοον, γ· εἰκοστοτέταρτον, α. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν παραπλησίως. γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος, ἐφόδῳ τινὶ ποικιλωτέρᾳ· σημαίνων τρόπον τινὰ καὶ ἐν τῇ γενέσει αὐτοῦ, ὅτι μῖγμα ἀμφοτέρων ἐστίν. ἐπειδὴ γὰρ ὁ μὲν ἀρτιάκις ἄρτιος, ἐξ ἀρτίων ὑφίσταται τῶν ἀπὸ μονάδος διπλασίων ἐς ἀεί· ὁ δὲ ἀρτιοπέρισσος ἀπὸ περισσῶν τῶν ἀπὸ τριάδος προϊόντων ἐς ἀεὶ, ἀναγκαῖον τοῦτον

ἐξ ἀμ

ὁ ιδ', ὁ ιη', ὁ κβ', ὁ κϛ', οἱ ὅμοιοι. μετὰ γὰρ τὸ διχασθῆναι ἕκαστον τούτων, ἀδίχαστα εὐθὺς τὰ μέρη εὑρίσκεται. Συμβέβηκε δὲ αὐτοῦ πᾶν ὃ ἐὰν εὑρεθῇ μέρος ἔχων ἀντιώνυμον τῇ δυνάμει εἶναι, καὶ πάλιν τὴν τοῦ μέρους ποσότητα ἀντισοδύναμον τοῦ ὀνόματι· μηδέποτε δὲ, μηδενὶ τρόπῳ ὁμογενῆ τὴν δύναμιν τοῦ μέρους τοῦ αὐτοῦ ὀνόματι ὑπάρχειν· οἷον ἐφ' ἑνὸς τοῦ ιη', τὸ μὲν ἥμισυ ἀρτιακῶς ὠνομασμένον ὑπάρχει θ', περισσὸν τῇ δυνάμει· τὸ δὲ τρίτον ἔμπαλιν περισσῶς ὀνοματοπεποιημένον ϛ', ἄρτιον τῇ ὑποστάσει. τὸ δὲ ϛ', ἐξ ἀναστρόφου γ'· καὶ τὸ θ', β'. κἀπὶ τῶν ἑτέρων, ὁ αὐτὸς εὑρεθήσεται τρόπος. μήτοι ἄρα τὰ τοιαῦτα αὐτῆς προσηγορίας τέτευχεν, ὅτι ἄρτιος ὤν, περισσῶν τῶν ἡμισευμάτων εὐθὺς τετύχηκε. γίνεται δὲ καὶ οὗτος τῶν ἀπὸ μονάδος δυάδι διαφερόντων, ὅ ἐστι περισσῶν, εὐτάκτως ἐκτεθέντων μέχρι οὗ βούλει, δυάδι πολυπλασιασθέντων. οἱ γὰρ ἀποτελούμενοι γένοιντο ἂν τάξει οὗτοι· ϛ', ι', ιδ', ιη', κβ', κϛ', λ'· καὶ μέχρις ἂν προχωρεῖν ἐθέλῃς. διαφέρουσι δὲ ἀλλήλων τετράδι οἱ μείζονες ἀεὶ τῶν ἐγγὺς ἐλαττόνων· αἴτιον δὲ τούτου, ὅτι οἱ ἐξ ἀρχῆς γνώμονες αὐτῶν, τουτέστι οἱ περισσοί, δυάδι ἀλλήλων ὑπερφέροντες, δυάδι ἐμηκύνθησαν, ἵνα οὗτοι γένωνται· δυὰς δὲ δυάδα πολυπλασιάσασα, τετράδα ποιεῖ. ἐν οὖν τῷ φυσικῷ ὕφει τοῦ ἀριθμοῦ, εὑρεθήσονται οἱ ἀρτιοπέρισσοι, πέμπτοι μὲν ἀπ' ἀλλήλων· τετράδι δὲ ὑπερέχοντες, τριάδι δὲ ὑπερβαίνοντες, δυάδι δὲ μηκυνομένων τῶν περισσῶν γινόμενοι. ἀντισοπαθεῖν δὲ λέγονται τοῖς ἀρτιάκις ἀρτίοις, ὅτι τούτων μὲν, τὸ μέγιστον ἄκρον μόνον διαιρετόν· ἐκείνων δὲ, τὸ ἐλάχιστον μόνον ἦν ἀδιαίρετον. καὶ δὴ καὶ ὅτι ἐπ' ἐκείνων μὲν, ἡ ἀντιπερίστασις τῶν μερῶν ἀκροτήτων εἰς μεσότητα ἢ μεσότητας, ἀποτελεῖ τὸ ἀπὸ ἴσον, τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζω, ἢ τοῖς ὑπὸ τοῦ μέσου. τούτων δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀμοιβὴν καὶ ἐξέτασιν, ὑποδιπλάσιον τὸ μέσον, τῶν δύο ἄκρων συντεθέντων· ἢ καὶ δύο ᾖ τὰ μέσα, καὶ αὐτὰ ἴσα ἀμφότερα, τοῖς δυσὶν ἄκροις. Περισσάρτιος δέ ἐστιν ἀριθμός, ὁ τὸ τρίτον εἶδος τοῦ ἀρτίου ἐμφαίνων, κοινὸς ὢν ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων, ὥσπερ

χεῖν. οἱ δὲ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ, ἀεὶ ἀλλήλοις, μέχρις ἂν εἰς τὰ ἄκρα ἡ ἀνταπόκρισις πλουτήσῃ· οἷον ἑξηκοστοτέταρτον μὲν, ἡ μονὰς ἔσται· ὅλον δὲ κατὰ τὴν μονάδα, ξδ. καὶ ἥμισυ μὲν, τὰ λβ. τριακοστόδυον δὲ, τὰ δύο· καὶ τέταρτον μὲν, τὰ ιϛ. ἑκκαιδέκατον δὲ, τὰ δ. ὄγδοον δὲ, ἄνευ ἀντιδιαστολῆς αὐτὰ τὰ η. συμβέβηκε δὲ πάντας τοὺς ἐκθέσει συντεθειμένους σωρηδὸν, ἴσους ἑνὶ τῷ μετ' αὐτοὺς παρὰ μονάδα γίνεσθαι. ὡς τὸ ἀναγκαίως ἡ ὁπωσοῦν συγκεφαλαίωσις περισσὸς ἀριθμὸς ἔσται· αἰεὶ γὰρ, ὁ παρὰ μονάδα ἴσος τῷ ἀρτίῳ, περισσός ἐστι. χρησιμεύσει δ' ἡμῖν, αὕτη ἡ ἐπίγνωσις, ὅσον οὐδέπω, πρὸς τὴν τῶν τελείων ἀριθμῶν σύστασιν· ὑποδείγματος δὲ χάριν, τῷ ξδ οἱ πρὸ αὐτοῦ μέχρι μονάδος ἴσοι εἰσὶ συγκεφαλαιωθέντες, παρὰ μίαν μονάδα. τῷ δὲ ρκη τῷ εὐθὺς ὑπ' αὐτὸν οἱ πρὸ αὐτοῦ πάντες, ὁμοίως εἰσὶν ἴσοι, παρὰ μίαν μονάδα. καὶ τοῖς συνεχέσι δὲ, ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ οἱ πρὸ τοῦ. καθὰ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς παρὰ μονάδα, ἴση τῷ μετ' αὐτήν· ὅ ἐστι τῷ δύο καὶ οἱ συναμφότεροι παρὰ μονάδα τῷ μετ' αὐτούς· οἱ σὺν τρεῖς παρὰ μονάδα τῷ ἑξῆς. καὶ τοῦτο, ἐπ' ἄπειρον προχωροῦν, ἄπταιστον εὑρήσεις. κἀκεῖνο δὲ, μεμνῆσθαι ἀναγκαιότατον· ἐὰν μὲν γὰρ ἄρτιοι ὦσιν αἱ τοῦ προκεχειρισμένου ἀρτιάκις ἀρτίου ἐκθέσεις, πάντως τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς ἄλληλα πολυπλασιαζομένων συμπληρούμενον, ἴσον ἔσται, τῷ ἀπὸ τῶν μέσων πρὸς ἄλληλα· ἐὰν δὲ περισσαὶ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου πρὸς ἑαυτό. ἅπαξ γὰρ ὁ ρκη ἐκ ἀρτίαις ἐκθέσεσιν ἴσος ἐστὶν, τῷ ὀκτάκις ιϛ· καὶ ἔτι, τῷ δὶς ξδ· καὶ πάλιν, τῷ τετράκις λβ· καὶ τοῦτο, δι' ὅλου. οἱ δὲ περισσαῖς ἐκθέσεσιν, ἴσον τὸ ἅπαξ ξδ, τῷ δὶς λβ· καὶ τοῦτο, τῷ τετράκις ιϛ· καὶ τοῦτο πάλιν, τῷ ὀκτάκις η· μόνου τοῦ μέσου πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου. Ἀρτιοπέριττος δὲ ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ τῷ γένει καὶ αὐτὸς ἄρτιος ὤν· ἀντιδιαστελλόμενος δὲ εἰδικῶς, τῷ προφρασθέντι, ἀρτιάκις ἀρτίῳ· ὁ τὴν μὲν εἰς δύο ἴσα διαίρεσιν ἐπιδεχόμενος, κατὰ τὸ κοινὸν γένος· τῶν μέντοι μερῶν ἑκάτερον εὐθὺς εἰς δύο ἴσα, ἄτμητον ἔχων· οἷον ὁ ϛ, ὁ ι, ὁ ιδ

ἐστι· τὸ δὲ αὐτὸ καὶ τὸ ἀρτιάκις ἄρτιόν ἐστι, κατὰ τὴν δύναμιν· γέ-
νεσις δὲ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου, ὥστε μηδένα διαφυγεῖν, ἀλλ' ἐξ ἑ-
νὸς πάντας ὑποπίπτειν αὐτῇ. καὶ γένοιτο ἂν οὕτως· ἀπὸ ῥίζης κα-
τὰ τὸν διπλάσιον λόγον προχωροῦντι μέχρις ἀπείρου, ὅσοι καὶ
γένωνται, οὗτοι πάντες, ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσιν· ἄλλους δὲ παρὰ τούτους
ἀμήχανόν ἐστιν εὑρεῖν· οἷον πρὸς ὑπόδειγμα, α, β, δ, η, ιϛ, λβ,
ξδ, ρκη, σνϛ, φιβ, καὶ ἐφ' ὅσον οὖν. ἕκαστος δὴ τῶν προκειμένων γέγονε
μὲν, κατ' ὃν ἀπὸ μονάδος διπλασίονα λόγον· ὑπάρχει δὲ, ἀρτιά-
κις ἄρτιος πάντως· καὶ πᾶν δὲ μέρος, ὃ ἂν εὑρεθῇ ἔχων, πάν-
τως καὶ παρώνυμόν ἐστιν ἑνός τινος τῶν ἐν αὐτῷ· καὶ μονάδος σύ-
στημα ἐν τούτῳ ὑπάρχει τοσοῦτον, ὁπόσον τῶν ἐν αὐτοῦ, εἰς
ὅ τις ἐστι· κατ' ἀντιπαράστασιν μέντοι καὶ ἀμοιβὴν, ἐὰν μέλλωσιν ἄρ-
τιοι, αἱ ἐκθέσεις τῶν ἀπὸ μονάδος διπλασιασμῶν, μία μὲν
οὐχ οἵα τε μεσότης εὑρεθῆναι· πάντως δὲ δύο, ἀφ' ὧν ἀρξαμένη
ἡ ἀντιπαράστασις καὶ ἀμοιβὴ μερῶν πρὸς δυνάμεις, καὶ δυνά-
μεων πρὸς μέρη, προχωρήσει τάξει· πρῶτον μὲν, ἐπὶ τὰ παρ' ἑ-
κάτερα δύο· εἶτα ὑπὲρ τοὺς ὑπερκειμένους ἑκατέρωθεν, μέχρις
ἂν ἐπὶ τοὺς ἀκροτάτους ἀφίκηται· ὥστε καὶ τὸ ὅλον ἀντιπα-
ρωνυμεῖσθαι τῇ μονάδι, καὶ τὴν μονάδα τῷ ὅλῳ· οἷον λόγου χά-
ριν, ἐὰν τὸν ρκη θῶμεν τὸν μέγιστον, ἀρτιογενεῖς ἔσονται αὐ-
τοῦ αἱ ἐκθέσεις τῶν ὅρων· ὀκτὼ γὰρ, αἱ μέχρις αὐτοῦ πᾶσαι καὶ
μίαν μεσότητα οὐχ ἕξουσιν. ἀδύνατον γὰρ ἐν ἀρτίῳ· ἀλλ' ἀναγ-
καίως δύο τήν τε ὀκτὼ, καὶ τὴν ιϛ, αἵτινες ἀνταποκρινοῦνται
ἀλλήλαις παρὰ μέρος. τοῦ γὰρ ὅλου τῶν ρκη, ὄγδοον μέν ἐστι,
τὰ ιϛ· ἔμπαλιν δὲ ἑκκαιδέκατον, τὰ η. καὶ προϊόντων ἐφ' ἑ-
κάτερον, τέταρτον μὲν, τὰ λβ· τριακοστόδυον δὲ, τὰ δ. καὶ πά-
λιν ἥμισυ μὲν, τὰ ξδ· ἑξήκοντα τέταρτον δὲ, τὰ δύο· καὶ τελευ-
ταῖον κατὰ τὰς ἀκρότητας, ἑκατοστοεικόγδοον μὲν, ἡ μονάς· ὅλον
δὲ κατὰ τὴν μονάδα ἔμπαλιν, τὰ ρκη. ἐὰν δὲ ἐν περιττοῖς ὅ-
ροις, ἡ ἔκθεσις γένηται, οἷον ἐν ζ, προχειρησαμένων ἡμῶν, τὰ
ξδ· ἡ μεσότης ἀναγκαίως μία ἔσται, κατὰ τὴν τῶν περιττῶν φύ-
σιν. καὶ αὕτη μὲν ἑαυτῇ ἀνταποκρινεῖται, διὰ τὸ σύζυγον μὴ ἔ-

πως γινομένην ἀμφότερα ἅμα ἐμφαίνοντα, τοὺς ἀριθμοὺς δύο εἴδη· οὐδέποτε ἄκρα τὰ ἀλλήλων, ἀλλὰ πάντοτε σὺν ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ διαλλήλων ὅρῳ, περιττός ἐστιν, ὁ μονάδι ἐφ' ἑκάτερα διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ· τουτέστιν, ἐπὶ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον. ἄρτιος δὲ, ὁ μονάδι διαφέρων ἐφ' ἑκάτερον, περιττοῦ ἀριθμοῦ· τουτέστι μονάδι μείζων, καὶ ἐλάσσων. πᾶς ἀριθμὸς, τῶν παρ' ἑκάτερα συντεθέντων ἅμα, ἥμισύς ἐστι· καὶ τῶν ὑπὲρ ἓν ἑκατέρωθεν κειμένων, ὁμοίως ἥμισύς ἐστι· καὶ ἔτι τῶν ὑπὲρ ἐκείνους· καὶ τοῦτο, μέχρις οὗ δυνατόν. μονωτάτη δὲ ἡ μονὰς, διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἑκατέρωθεν αὐτὴν δύο ἀριθμοὺς, ἑνὸς μόνου τοῦ παρακειμένου, ἥμισύς ἐστι. ἀρχὴ ἄρα πάντων φυσικὴ, ἡ μονὰς καθ' αὑτό. διαίρεσις δὲ, τοῦ ἀρτίου, τὸ μὲν ἐστὶν ἀρτιάκις ἄρτιον· τὸ δὲ, περισσάρτιον· τὸ δὲ, ἀρτιοπέριττον. ἐναντία μὲν ἀλλήλοις ὥσπερ ἀκρότητες, τὸ ἀρτιάκις ἄρτιον, καὶ ἀρτιοπέρισσον· κοινὸν δὲ ἀμφοτέρων, ὥσπερ μεσότης, τὸ περισσάρτιον. Ἀρτιάκις οὖν ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ αὐτός τε εἰς δύο ἴσα δυνάμενος διχασθῆναι κατὰ τὴν τοῦ γένους φύσιν, καὶ τῶν ἑαυτοῦ μερῶν ὁποτερονοῦν, τοιοῦτον ἐστὶ δίχα διαιρετόν. καὶ πάλιν κατὰ τὰ αὐτὰ τῶν ἐκείνῳ μερῶν ὁποτερονοῦν, εἰς δύο ἴσα διαιρετόν· καὶ μέχρις ἂν εἰς τὴν φύσιν ἄτομον μονάδα καταντήσῃ ἡ τῶν ἀεὶ ὑπομερισμῶν διαίρεσις· οἷον ὑποδείγματος χάριν ἔστω ὁ ξδ· τούτου γὰρ ἥμισυς ὁ λβ· καὶ τούτου, ὁ ις· καὶ τούτου ἥμισυς, ὁ η· καὶ τούτου, ὁ δ· καὶ τούτου, ὁ β· ἔπειτα τὸ τελευταῖον μονὰς, τούτου ἡμίσεια· ἥτις φύσει ἄτμητος οὖσα, οὐκέτι ἐπιδέχεται τὸ ἥμισυ. παρακολουθεῖ δὲ αὐτῷ, καὶ ὅτι ἂν ἐν αὐτῷ μέρος ληφθῇ, πάντως ἀρτιάκις ἀρτιώνυμον εἶναι τὴν προσηγορίαν· τὸ δὲ αὐτὸ καὶ τῇ ποσότητι τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων, ἀρτιοδύναμον· μηδέποτε δὲ ἑτέρῳ γένει κοινωνεῖν, ἑκάτερον τούτων. μήτι δὲ ἄρα καὶ παρὰ τοῦτο ἀρτιάκις ἄρτιος ὠνόμασται, ὅτι αὐτός ἄρτιος ὢν, καὶ τὰ μέρη καὶ τὰ τῶν μερῶν μέρη, μέχρι μονάδος ἄρτια ἀεὶ ἔχει, ὀνόματί τε, καὶ δυνάμει. καὶ ἑτέρως, ὅτι πᾶν μέρος, ὃ ἐὰν ἔχῃ ἀρτιάκις ἄρτιον, κατὰ τὸ ὄνομά

ἐστι

τὸν αὐτὸν μόνον, καὶ παντάπασιν ἄϋλον· οὐσίαν μέντοι τὴν ὄντως ἵνα πρὸς αὐτὸν ὡς λόγον τεχνικὸν, ἀποτελεσθῇ τὰ σύμπαντα ταῦτα, χρόνος, κίνησις, οὐρανὸς, ἄστρα, ἑλιγμοὶ παντοῖοι. ἀναγκαῖον ἄρα τὸν ἐπιστημονικὸν ἤδη ἀριθμὸν ἐπὶ τῇ τοιούτων ὑπάρχοντα, καθ' ἑαυτὸν ἡρμόσθαι· καὶ οὐχ ὑπ' ἄλλου, ἀλλ' ὑφ' ἑαυτοῦ. πᾶν δὲ ἡρμοσμένον, ἐξ ἐναντίων πάντως ἡρμόσθη καὶ ὄντων γε. οὔτε γὰρ τὰ μὴ ὄντα ἁρμοσθῆναι οἷά τε· οὔτε τὰ ὄντα μὲν, ὅμοια δὲ ἀλλήλοις· οὔτε τὰ διαφέροντα μὲν, ἄλλογα δὲ πρὸς ἄλληλα. ἀπολείπεται δὴ, τὰ ἐξ ὧν ἁρμόζεται, καὶ ὄντα εἶναι, καὶ διάφορα, καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχοντα· ἐκ τούτων ἄρα καὶ ὁ ἐπιστημονικὸς ἀριθμός. ἐστὶ γοῦν, τὰ ἐν αὐτῷ πρῶτα εἴδη δύο, οὐσίαν τε ἔχοντα τὴν τῆς ποσότητα, καὶ διαφέροντα ἀλλήλων, καὶ οὐχ ἑτερογενῆ περισσὸν καὶ ἄρτιον· καὶ ἐναλλὰξ ὑπὸ θαυμασίου καὶ θείας φύσεως ἡρμοσμένα ἀλλήλοις ἀχωρίστως καὶ ἐνοειδῶς, ὡς αὐτίκα εἰσόμεθα. Ἀριθμὸς ἐστὶ πλῆθος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα· ἢ ποσότητος χύμα, ἐκ μονάδων συγκείμενον. τοῦ δὲ ἀριθμοῦ πρώτη τομὴ, τὸ μὲν, ἄρτιον· τὸ δὲ, περιττόν. ἔστι δὲ ἄρτιον μὲν, ὃ οἷόν τε εἰς δύο ἴσα διαιρεθῆναι, μονάδος μέσον μὴ παρεμπιπτούσης· περιττὸν δὲ, τὸ μὴ δυνάμενον εἰς δύο ἴσα μερισθῆναι, διὰ τὴν προειρημένην τῆς μονάδος μεσιτείαν. οὗτος μὲν οὖν ὁ ὅρος, ἐκ τῆς δημώδους ὑπολήψεως· κατὰ δὲ τὸ πυθαγορικὸν, ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τὴν εἰς τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα κατὰ ταὐτὸ, τομὴν ἐπιδεχόμενος· μέγιστα μὲν, πηλικότητι· ἐλάχιστα δὲ, ποσότητι κατὰ φυσικὴν τὴν δύο τούτων γενῶν, ἀντιπεπόνθησιν. περισσὸς δὲ, ὁ μὴ δυνάμενος τοῦτο παθεῖν, ἀλλ' εἰς ἄνισα δύο τεμνόμενος.

Ἑτέρῳ δὲ τρόπῳ κατὰ τὸ παλαιὸν, ἄρτιός ἐστιν, ὁ καὶ εἰς δύο ἴσα τμηθῆναι δυνάμενος, καὶ εἰς ἄνισα δύο· πλὴν τῆς ἐν αὐτῷ ἀρχοειδοῦς δυάδος, θάτερον τὸ διχοτόμημα μόνον ἐπιδεχομένης τὸ εἰς ἴσα· ἐν ᾗ πηλικουοῦν τομῇ παρεμφαίνων, τὸ ἕτερον εἶδος μόνον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως ἂν διχασθῇ, ἀμέτοχον τοῦ λοιποῦ. περισσὸς δέ ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ καθ' ἣν ἐνδεχόμενος τομὴν εἰς ἄνισον πάν-

τοιούτων, ὁ γεωμετρία λέγων· καὶ οὐκ ἄνευ τῶν ἑκάστῳ συνεπιφερομένων ἀριθμῶν ἐπινοεῖσθαι τὰ τοιαῦτα δύναται. πῶς γὰρ οἷόν τε τριπλάσιον εἶναι ἢ λέγεσθαι, μὴ προϋποκειμένου τοῦ τρία ἀριθμοῦ· ἢ ὀκταπλάσιον, μὴ ὑποκειμένου τοῦ ὀκτώ; ἔμπαλιν δὲ εἴη ἂν τὰ τρία καὶ τὰ δ̄ καὶ τὰ ἑξῆς, μὴ ὄντων παρωνύμων σχημάτων. συναναιρεῖ ἄρα ἡ ἀριθμητικὴ τὴν γεωμετρίαν· ἀλλ' οὐ συναναιρεῖται ὑπ' αὐτῆς· καὶ συνεπιφέρεται μὲν ἐκείνῃ, οὐ συνεπιφέρει δὲ αὐτήν. πάλιν δὲ ἐπὶ τῆς μουσικῆς· οὐ γὰρ ὅτι προγενέστερον τὸ καθ' αὑτὸ τοῦ πρὸς ἄλλο, καθάπερ καὶ τὸ μέγα τοῦ μείζονος, καὶ τὸ πλούσιον τοῦ πλουσιωτέρου, καὶ ὁ ἄνθρωπος τοῦ πατρός· ἀλλ' ὅτι καὶ αἱ μουσικαὶ συμφωνίαι, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, κατὰ ἀριθμὸν εἰσὶν ὠνομασμέναι· ὁμοίως καὶ τοὺς ἁρμονικοὺς λόγους, ἀριθμητικοὺς πάντως ἔχουσιν· ἡ μὲν διὰ τεσσάρων, ἐπίτριτος· ἡ δὲ διὰ πέντε, ἡμιόλιος· ἡ δὲ διὰ πασῶν, διπλάσιος· τριπλάσιος δέ, ἡ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε· τετραπλάσιος δέ, ἡ πλεότητα ἡ δὶς διὰ πασῶν. ἐκδηλότερόν γε μὴν ἡ σφαιρική, δι' ἀριθμητικῆς τυγχάνει πάντων τῶν προσηκόντων αὐτῇ σκεμμάτων· οὐ μόνον ὅτι γεωμετρίας μεταγενεστέρα ἐστὶν (ἡ γὰρ κίνησις φύσει μετὰ τὴν μονήν) οὐδ' ὅτι ἁρμονίας ἐκ παντὸς ἐμμελοῦς τὰ τῶν ἀστέρων κινήματα τέτυχεν· ἀλλ' ὅτι καὶ ἀριθμῶν περιόδοις καὶ ποσότησιν, ἀνατολαί τε καὶ δύσεις, καὶ προποδισμοί, καὶ ἀναποδισμοί, καὶ ἐπιπροσθήσεις παντοῖαι διαρθροῦνται. ὡς οὖν προγενεστέρας φύσεως καὶ τιμιωτέρας, καὶ πρεσβυτέρας, ὡς συνεῖ μηδὸς καὶ ἐθελώης, καλῶς προτάξαι τὴν τεχνολογίαν ὑπεστησάμεθα· τὴν δὲ ἀρχὴν τῆς τεχνολογίας τοῦ σαφοῦς χάριν, ἐντεῦθεν ποιησόμεθα.

Πάντα τὰ κατὰ τεχνικὴν διέξοδον ὑπὸ φύσεως ἐν τῷ κόσμῳ διατεταγμένα, κατὰ μέρος τε καὶ ὅλα φαίνεται κατὰ ἀριθμὸν, ὑπὸ τῆς προνοίας, καὶ τοῦ τὰ ὅλα δημιουργήσαντος νοῦ διακεκρίσθαι τε καὶ κοσμεῖσθαι· διαβεβαιουμένου τοῦ παραδείγματος ἐκ τοῦ οἷον ἀρχῆς λόγον πρὸ χαράγματος, ἐπέχειν τὸν ἀριθμὸν, προϋποστάντα ἐν τῇ τοῦ κοσμοποιοῦ θεοῦ διανοίᾳ· νοη-

τὸν

λῦσαι, ἐπιπλήττων φησίν· ὡς ἡδὺς εἶ ὅτι ἔοικε δεδίεται. μὴ ἄρα ἄχρηστον ταῦτα τὰ μαθήματα προστάττοιμι· τὸ δὲ ἔστι παγχάλεπον, μᾶλλον δὲ ἀδύνατον. ὄμμα γὰρ τῆς ψυχῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων, ἀποτυφλούμενον καὶ κατορυττόμενον, διὰ τούτων μόνων, ἀναζωπυρεῖται καὶ ἀνεγείρεται· κρεῖττον ὂν σωθῆναι, μυρίων σωματικῶν ὀμμάτων· μόνῳ γὰρ αὐτῷ, ἡ τοῦ παντὸς ἀλήθεια ὁρᾶται. τίνα οὖν ἀναγκαῖον πρώτην τῶν τεσσάρων τούτων μεθόδων, ἐκμανθάνειν; ἢ δηλονότι τὴν φύσει πασῶν προϋπάρχουσαν καὶ κυριωτέραν, ἀρχῆς τε καὶ ῥίζης, καὶ οἱονεὶ πρὸς τὰς ἄλλας, μητρὸς λόγον ἐπέχουσαν; ἔστι δὲ αὕτη ἡ ἀριθμητική· οὐ μόνον ὅτι ἔφαμεν αὐτὴν ἐν τῇ τοῦ τεχνίτου θεοῦ διανοίᾳ προϋποστῆναι τῶν ἄλλων, ὡσανεὶ λόγον τινὰ κοσμικὸν καὶ παραδειγματικόν, πρὸς ὃν ἀπερειδόμενος ὁ τῶν ὅλων δημιουργός, ὡς πρὸς προκέντημά τι καὶ ἀρχέτυπον παράδειγμα, τὰ ἐκ τῆς ὕλης ἀποκοσμεῖ καὶ τοῦ οἰκείου τέλους τυγχάνειν ποιεῖ· ἀλλὰ καὶ ὅτι φύσει προγενεστέρα ὑπάρχει· ὅσῳ συναναιρεῖ μὲν ἑαυτῇ τὰ λοιπά, οὐ συναναιρεῖται δὲ ἐκείνοις. οἷον τὸ ζῷον, πρότερον τοῦ ἀνθρώπου φύσει ἐστίν. ἀναιρεθέντος γὰρ τοῦ ζῴου, ἀναιρεῖται καὶ ὁ ἄνθρωπος· οὐκέτι δὲ ἀναιρεθέντος τοῦ ἀνθρώπου, συναναιρεῖται καὶ τὸ ζῷον. καὶ πάλιν ἄνθρωπος, προγενέστερος γραμματικοῦ· μὴ ὄντος ἀνθρώπου, οὐδὲ γραμματικός ἐστι· μὴ ὄντος δὲ γραμματικοῦ, δύναται ἄνθρωπος εἶναι. ὥστε ἐπεὶ συναναιρεῖ, διὰ τοῦτο καὶ πρεσβύτερον· καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου δέ, νεώτερον λέγεται, καὶ ὑστερογενέστερον, ὃ συνεπιφέρει μὲν ἑαυτῷ τὸ λοιπόν· οὐ συνεπιφέρεται δὲ ἐκείνῳ. οἷον ὁ μουσικός· συνεπιφέρει γὰρ ἑαυτῷ πάντως τὸν ἄνθρωπον. καὶ πάλιν ἵππος· συνεπιφέρεται γὰρ πάντως τὸ ζῷον· τούτῳ οὐκ ἔμπαλιν δέ. ζῴου γὰρ ὄντος, οὐκ ἀναγκαῖον εἶναι ἵππον. οὐδὲ ἀνθρώπου ὑπάρχοντος συνεπιφέρεται μουσικός. οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν προλεχθεισῶν ἐπιστημῶν· οὔσης μὲν γεωμετρίας, ἀνάγκη καὶ τὴν ἀριθμητικὴν συνεπιφέρεσθαι· ἅμα γὰρ ταύτῃ, τρίγωνον, ἢ τετράγωνον, ἢ ὀκτάεδρον, ἢ εἰκοσάεδρον, ἢ διπλάσιον, ἢ ὀκταπλάσιον, ἢ ἡμιόλιον, ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον.

κισα δὲ, καὶ περὶ μονάδων· ταῦτα δὲ τὰ μαθήματα, δοκοῦντι ἔμμεναι ἀδελφεά. περὶ γὰρ ἀδελφεὰ τὰ τῶ ὄντος πρώτιστα δύο εἴδεα, τὰν ἀναστροφὰν ἔχει. καὶ Πλάτων δὲ, ἐπὶ πέλει τοῦ τρισκαιδεκάτου τῶν νόμων, ὅπερ τινὲς φιλόσοφον ἐπιγράφουσιν, ὅτι ἐν αὐτῷ πολυσκοπεῖ ποταπὸν δεῖ τὸν φιλόσοφον εἶναι, ἀνακεφαλαιούμενος τὰ διὰ πλειόνων πρὸς διαλεχθέντα καὶ προδιαβεβαιωθέντα, ἐπιφέρει· Ἅπαν διάγραμμα ἀριθμοῦ τε σύστημα καὶ ἁρμονίας σύστασιν ἅπασαν, τῆς τε τῶν ἄστρων φορᾶς τὴν ἀναλογίαν μίαν ἀναφανῆναι δεῖ τῷ κατὰ τρόπον μανθάνοντι. φανήσεται δ᾽ ἂν ὃ λέγομεν ὀρθῶς, εἴ τις εἰς ἓν βλέπων, πάντα μανθάνει· δεσμὸς γὰρ ἁπάντων τούτων, εἷς ἀναφανήσεται. εἰ δέ τις ἄλλως μεταχειριεῖται φιλοσοφίαν, τύχην δεῖ καλεῖν συνομολογοῦμεν. οὐ γὰρ ἄνευ τούτων, ἡ ὁδός ποτε· ἀλλ᾽ οὕτως ὁ τρόπος· ταῦτα τὰ μαθήματα εἴτε χαλεπὰ, εἴτε ῥᾴδια, ταύτῃ πορευτέον· ἀμελεῖν δὲ οὐ δεῖ. τὸν δὲ ταῦτα πάντα οὕτω λαβόντα, ὡς ἐγὼ λέγω, τοῦτον ἐγὼ καλῶ σοφώτατον, καὶ διϊσχυρίζομαι παίζων τε, καὶ σπουδάζων. δῆλον γὰρ ὅτι, κλίμαξί τισι καὶ γεφύραις ἔοικε ταῦτα τὰ μαθήματα, διαβιβάζοντα τὴν διάνοιαν ἡμῶν, ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν καὶ δοξαστῶν, ἐπὶ τὰ νοητὰ, καὶ ἐπιστημονικά. καὶ ἀπὸ τῶν συντρόφων ἡμῖν καὶ ἐκ βρεφῶν ὄντων συνήθων ὑλικῶν καὶ σωματικῶν, ἐπὶ τὰ ἀσυνήθη τε καὶ ἑτερόφυλα πρὸς τὰς αἰσθήσεις. τῇ δὲ ἀϋλίᾳ καὶ ἀϊδιότητι, συγγενέστερα, ταῖς ἡμετέραις ψυχαῖς, καὶ πολὺ πρότερον τῶν ἐν αὐταῖς νοητικῶν. καθὰ καὶ ὁ παρὰ Πλάτωνι ἐν τῇ πολιτείᾳ Σωκράτης τοῦ προσδιαλεγομένου, αἰτίας τινὰς εὐλόγους ἐπιφέρειν δοκοῦντος τοῖς μαθήμασιν, ὡς εὔχρηστοί εἰσι πρὸς τὸν ἀνθρώπινον βίον· ἡ μὲν ἀριθμητικὴ πρὸς λογισμοὺς, καὶ διανομὰς, καὶ συνεισφορὰς, καὶ ἀμείψεις, καὶ κοινωνίας· ἡ δὲ γεωμετρία, πρὸς στρατοπεδεύσεις πόλεών τε καὶ ἱερῶν συνοικήσεις, καὶ γεωμορίας· ἡ δὲ μουσικὴ, πρὸς ἑορτὰς καὶ θυμηδίας, καὶ θεῶν θρησκείας· σφαιρικὴ δὲ, καὶ ἀστρονομία, πρὸς γεωργίας τε καὶ ναυτιλίαν, καὶ τὰς ἄλλας καταρχὰς τῶν πράξεων † εὐχρείας, καὶ ἐπιτηδειότητος προσδηλοῦσα

γρ. εὐκαιρείας.

μένης ὁλότητος διαιρούμενον, οὐδαμῇ δύναται παύειν τὴν τομὴν, ἀλλ' ἐπ' ἄπειρον δὴ ταῦτα προχωρεῖ) αἱ δὲ ἐπιστῆμαι πάντως πεπερασμένων εἶεν ἐπιστῆμαι, ἀπείρων δὲ οὐδέποτε· φαίνεται δὴ ὅτι οὔτε περὶ ἁπλῶς μέγεθος, οὔτε περὶ ἁπλῶς πλῆθος, συσταίη ἄν ποτε ἐπιστήμη. ἀόριστον γὰρ ἑκάτερον, καὶ καθ' ἑαυτό ἐστι πλῆθος μὲν, ἐπὶ τὸ πλεῖον· μέγεθος δὲ, ἐπὶ τὸ ἔλαττον· ἀλλὰ περί τι ἀπ' ἀμφοῖν ἀφωρισμένον· ἀπὸ μὲν πλήθους, περὶ τὸ ποσόν· ἀπὸ δὲ μεγέθους, περὶ τὸ πηλίκον. Πάλιν δὲ ἐξ ἀρχῆς, ἐπεὶ τοῦ ποσοῦ τὸ μὲν ὁρᾶται καθ' αὑτὸ, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν ἔχον, οἷον ἄρτιον, περιττὸν, τέλειον, τὰ ἐοικότα· τὸ δὲ, πρὸς ἄλλο πως ἔχον ἤδη καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον σχέσει ἐπινοούμενον, οἷον διπλάσιον, μεῖζον, ἔλαττον, ἥμισυ, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, τὰ ἐοικότα δηλονότι. ἄρα δύο μέθοδοι ἐπιλήψονται ἐπιστημονικαὶ, καὶ διευκρινήσουσι πᾶν τὸ περὶ ποσοῦ σκέμμα· ἀριθμητικὴ μὲν, τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτό· μουσικὴ δὲ, τὸ περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο. πάλιν δὲ ἐπὶ τοῦ πηλίκου, τὸ μέν ἐστιν, ἐν μονῇ καὶ στάσει· τὸ δὲ, ἐν κινήσει καὶ περιφορᾷ. δύο ἕτεραι κατὰ αὐτὰ ἐπιστῆμαι, ἀκριβώσουσι τὸ πηλίκον· τὸ μὲν μένον καὶ ἠρεμοῦν, γεωμετρία· τὸ δὲ φερόμενον καὶ περιπολοῦν, σφαιρική. οὐκ ἄρα τούτων ἄνευ, δυνατὸν ἀκριβῶσαι τὰ τοῦ ὄντος εἴδη· οὐδ' ἄρα τὴν εἰς τοῖς οὖσιν ἀλήθειαν εὑρεῖν, ἧς ἐπιστήμη, σοφία· φαίνεται δὲ ὅτι οὐδ' ὀρθῶς φιλοσοφεῖν· ὅπερ γὰρ ζωγραφίη, συμβάλλεται τέχναις βαναύσοις πρὸς θεωρίης ὀρθότητα, τοῦτο τοι γραμμαὶ καὶ ἀριθμοὶ, καὶ ἁρμονικὰ διαστήματα, καὶ κύκλων περιπολήσιες, πρὸς λόγων σοφῶν μαθήσιας, συνεργίην ἔχουσιν. Ἀνδροκύδης φησὶν ὁ πυθαγορικὸς, ἀλλὰ καὶ Ἀρχύτας ὁ ταραντῖνος, ἀρχόμενος τοῦ ἁρμονικοῦ, τὸ αὐτὸ οὕτω πως λέγει· καλῶς μοι δοκοῦντι τοὶ περὶ τὰ μαθήματα διαγνώμεναι· καὶ οὐδὲν ἄτοπον αὐτοὺς ὀρθῶς, οἷα ἐντὶ, περὶ ἑκάστου φρονέειν. περὶ γὰρ τᾶς τῶν ὅλων φύσιος καλῶς διαγνόντες, ἔμελλον καὶ περὶ τῶν κατὰ μέρος, οἷα ἐντὶ, καλῶς ὀψεῖσθαι. περί τε δὴ τᾶς γεωμετρικᾶς καὶ ἀριθμητικᾶς παρέδωκαν ἄμμιν, σαφῆ διάγνωσιν· οὐχ ἥ-

μαι, ὑπάρχει καθ' ἑαυτὰ ἀκίνητα καὶ ἀμετάπτωτα· συμβεβηκό-
τως δὲ, μετέχει καὶ παραπολαύει τῶν περὶ τὸ ὑποκείμενον σῶμα πα-
θῶν. τῶν δὴ τοιούτων, ἐξαιρέτως ἐπιστήμη ἐστὶν, ἡ σοφία· συμ-
βεβηκότως δὲ, καὶ τῶν μετεχόντων αὐτῶν, ὅσα ἐστὶ σωμάτων.
δῆλ' ἐκεῖνα μὲν ἄυλα καὶ ἀΐδια, καὶ ἀτελεύτητα, καὶ διὰ παν-
τὸς ὅμοια, καὶ ἀπαράλλακτα, πέφυκε διατελεῖν· ὡσαύτως τῇ αὐ-
τῶν οὐσίᾳ ἐπιδιαμένοντα. καὶ ἕκαστον αὐτῶν, κυρίως ὂν λέγεται.

τὰ δὲ ἐν γενέσει τε καὶ φθορᾷ, καὶ αὐξήσει, καὶ μειώσει, καὶ
μεταβολῇ παντοίᾳ καὶ μετουσίᾳ φαίνεται διηνεκῶς στρεπόμενα·
καὶ λέγεται μὲν ὁμωνύμως ἐκείνοις ὄντα, καθόσον αὐτῶν μετέ-
χει. ἔστι δὲ τῆς ἑαυτῶν φύσεως οὐκ ὄντως ὄντα. οὐδὲ γὰρ τὸ βραχύ-
τατον, ἐπὶ ταὐτοῦ διαμένει· ἀλλ' ἀεὶ μεταβαίνει παντοίως ἀλ-
λασσόμενα· κατὰ τὸν παρὰ Πλάτωνι Τίμαιον· ὅς φησι τί τὸ ὂν
ἀεὶ, γένεσιν δὲ οὐκ ἔχον· καὶ τί τὸ γινόμενον μὲν, ὂν δὲ οὐδέποτε· τὸ
μὲν δὴ, νοήσει μετὰ λόγου περιληπτὸν, ἀεὶ καὶ κατὰ ταὐτὰ ὄν·
τὸ δ' αὖ δόξῃ μετ' αἰσθήσεως ἀλόγου δοξαστὸν, γινόμενόν τε, καὶ
ἀπολλύμενον· ὄντως δὲ, οὐδέποτε ὄν. λοιπὸν ἄρα καὶ ἀναγκαιό-
τατον εἰ τοῦ προσήκοντος καὶ ἀνθρώπῳ πρέποντος τέλους ἐφιέμεθα,
τουτέστιν, εὐζωΐας· αὕτη δὲ, διὰ φιλοσοφίας μόνης, ὑφ' ἑτέρου
δὲ οὐδενὸς συντελεῖται· φιλοσοφία δὲ ἡμῖν ὡς ἔφην, σοφίας ὄ-
ρεξις· σοφία δὲ, ἐπιστήμη τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας· ὄντα δὲ, τὰ
μὲν, κυρίως λεγόμενα· τὰ δὲ, ὁμωνύμως· ἀκριβῶς διελεῖν καὶ
ἀρθρῶσαι, τὰ τοῖς εἰσὶ συμβεβηκότα. τῶν τοίνυν ὄντων, τῶν τε
κυρίως καὶ τῶν καθ' ὁμωνυμίαν, ὅπερ ἐστὶ, νοητῶν τε καὶ αἰσθη-
τῶν, τὰ μὲν ἐστὶν ἡνωμένα καὶ ἀλληλουχούμενα· οἷον ζῷον, κόσ-
μος, δένδρον, καὶ τὰ ὅμοια· ἅπερ κυρίως καὶ ἰδίως καλεῖται με-
γέθη. τὰ δὲ, διῃρημένα τε καὶ ἐν παραθέσει, καὶ οἷον κατὰ σωρεί-
αν, ἃ καλεῖται πλήθη· οἷον ποίμνη, δῆμος, σωρὸς, χορὸς, καὶ τὰ
παραπλήσια. τῶν ἄρα δύο εἰδῶν τούτων, ἐπιστήμην νομιστέον, τὴν
σοφίαν· ἀλλ' ἐπεὶ πᾶν πλῆθος, καὶ πᾶν μέγεθος, ἄπειρα τῇ αὐ-
τῶν φύσει ἐξ ἀνάγκης ἐστὶ (τὸ μὲν γὰρ πλῆθος ἀπὸ ὡρισμένης ῥί-
ζης ἀρξάμενον οὐ παύεται προκόπτον· τὸ δὲ μέγεθος ἀπὸ ὡρισ-

μένης

ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑ-ΣΙΝΟΥ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ ΤΩ͂Ν ΕἸΣ ΔΎΟ, ΤῸ ΠΡΩ͂ΤΟΝ.

Οἱ παλαιοὶ καὶ πρῶτοι μεθοδεύσαντες ἐπιστήμην, καταρξαμένου Πυθαγόρου, ὡρίζοντο φιλοσοφίαν εἶναι, φιλίαν σοφίας· ὡς καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα ἐμφαίνει· τὴν πρὸ Πυθαγόρου, πάντων σοφῶν καλουμένων, συγκεχυμένῳ ὀνόματι, ὥσπερ καὶ τέκτων, καὶ σκυτοτόμος, καὶ κυβερνήτης, καὶ ἁπλῶς ὁ τέχνης τινός, ἢ δημιουργίας ἔμπειρος. ἀλλ᾽ ὅ γε Πυθαγόρας συστείλας πάντων τὸ ὄνομα, ἐπὶ τὴν τοῦ ὄντος ἐπιστήμην καὶ κατάληψιν καὶ μόνην τὴν ἐν τούτῳ γνῶσιν τῆς ἀληθείας, σοφίαν ἰδίως καλέσας· εἰκότως καὶ τὴν ταύτης ὄρεξιν καὶ μεταδίωξιν, φιλοσοφίαν προσηγόρευσεν, οἷον σοφίας ὄρεξιν. ἀξιοχρεώτερος δέ ἐστι τῶν ἄλλως ὁριζομένων, παρόσον ἰδίου ὀνόματος καὶ πράγματος, ἔννοιαν δηλοῖ· καὶ ταύτην δὲ τὴν σοφίαν ὡρίζετο ἐπιστήμην, τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας· ἐπιστήμην μὲν οἰόμενος εἶναι, κατάληψιν τοῦ ὑποκειμένου, ἄπταιστον καὶ ἀμετακίνητον. ὄντα δὲ, τὰ κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡσαύτως ἀεὶ διαπλοῦντα ἐν τῷ κόσμῳ, καὶ οὐδέποτε τοῦ εἶναι ἐξιστάμενα, οὐδὲ ἐπὶ βραχύ. ταῦτ᾽ ἂν εἴη, τὰ ἄυλα· καὶ ὧν κατὰ μετουσίαν ἕκαστον λοιπὸν, τῶν ὁμωνύμως ὄντων καλουμένων, δι᾽ ὃ λέγεται καὶ ἔστι. τὰ μὲν γὰρ σωματικὰ δήπου καὶ ὑλικά, ἐν διηνεκεῖ ῥύσει καὶ μεταβολῇ, ἀλλὰ παντός ἐστι, μιμούμενα τὴν τῆς ἐξ ἀρχῆς ἀιδίου ὕλης καὶ ὑποστάσεως φύσιν καὶ ἰδιότητα· ὅλη γὰρ δι᾽ ὅλης, ἦν τρεπτὴ καὶ ἀλλοιωτή. τὰ δὲ περὶ αὐτήν, ἢ σὺν αὐτῇ θεωρούμενα, ἀσώματα· οἷον ποιότητες, ποσότητες, σχηματισμοί, μεγέθη, μικρότητες, ἰσότητες, σχέσεις, ἐνέργειαι, διαθέσεις, τόποι, χρόνοι· πάντα ἁπλῶς οἷς περιέχεται τὰ ἐν ἑκάστῳ σώ-

λα ἢ μαζ

ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑ-
ΣΙ'ΝΟΥ ἈΡΙΘΜΗΤΙΚΗ͂Σ ΒΙΒΛΙ'Α ΔΥ'Ο.

NICOMACHI GERA-
SINI ARITHMETI-
cæ libri duo.

Nunc primùm typis excuſi, in lucem eduntur.

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

PARISIIS.
In officina Chriſtiani Wecheli.
M. D. XXXVIII.